淡中范畴的两个实例

傅题硕

2020 年 6 月 13 日

目录

目录

广群

定义.

k: 域, S: k 上概型, 一个 S 上的**广群** (groupoid) 是:

- S 上概型 G,
- 两个态射 $b, s : G \to S$,
- $S \times S$ 上的复合态射 $\circ : G \times_{sS^b} G \to G$.

满足对所有 k 上的概型 T, 由

$$(S(T) = \mathrm{Hom}(T, S), G(T) = \mathrm{Hom}(T, S), s, b, \circ)$$

构成的范畴为广群, 其中 $S(T)$ 为对象, $G(T)$ 为态射.

利用米田引理: 存在 $S \times S$ 上的单位态射 $\varepsilon : S \to G$ 和
逆态射 "-1" $: G \to G$, 满足广群该有的性质.

广群的表示

定义.

S 上的一个广群 G 的**表示**是 $V \in \mathsf{Qcoh}(S)$, 具有 G 的作用.
即存在 G 上的同构 $u : s^*V \xrightarrow{\sim} b^*V$ 满足群作用的限制:

- $\varepsilon^* u$ 为恒同,
- u 在 $\circ : G \times_{sSb} G \to G$ 的拉回是 $\mathrm{pr}_1^* u \circ \mathrm{pr}_2^* u$.

对于每个 S 上的概型 T, 一个表示 V 给出, 广群 $(S(T), G(T), s, b, \circ)$ 的表示:
对象 $t : T \to S$ 的像为 t^*V,
态射 $g : G \to S$ 的像为 $g^*u : s(g)^*V \to b(g)^*V$.

广群的表示

定义.

S 上的一个广群 G 的**表示**是 $V \in \mathrm{Qcoh}(S)$, 具有 G 的作用. 即存在 G 上的同构 $u : s^*V \xrightarrow{\sim} b^*V$ 满足群作用的限制:

- $\varepsilon^* u$ 为恒同,
- u 在 $\circ : G \times_{sSb} G \to G$ 的拉回是 $\mathrm{pr}_1^* u \circ \mathrm{pr}_2^* u$.

对于每个 S 上的概型 T, 一个表示 V 给出, 广群 $(S(T), G(T), s, b, \circ)$ 的表示:
对象 $t : T \to S$ 的像为 t^*V,
态射 $g : G \to S$ 的像为 $g^*u : s(g)^*V \to b(g)^*V$.

记这样构成的范畴为 $\mathrm{Rep}(S : G)$.

关联的 gerbe

S 上的一个广群, 自然成为范畴 Sch$/k$ 上的一个纤维范畴, 这是一个预叠 (prestack). 记其在 fpqc 拓扑下的叠化为 $\mathcal{G}_{S:G}$.

对于一个 Sch$/k$ 上的纤维范畴 $\mathcal{F}$, 它的一个表示为 Sch$/k$ 上的函子 $\mathcal{F} \to \mathrm{Qcoh}/k$.
故: 对所有 k 概型 T, 有映射 $\mathcal{F}(T) \to \mathrm{Qcoh}(T)$.

根据叠化的性质知, $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_{S:G}) \simeq \mathrm{Rep}(S : G)$.

关联的 gerbe

S 上的一个广群, 自然成为范畴 Sch$/k$ 上的一个纤维范畴, 这是一个预叠 (prestack). 记其在 fpqc 拓扑下的叠化为 $\mathcal{G}_{S:G}$.

对于一个 Sch$/k$ 上的纤维范畴 $\mathcal{F}$, 它的一个表示为 Sch$/k$ 上的函子 $\mathcal{F} \to$ Qcoh$/k$.
故: 对所有 k 概型 T, 有映射 $\mathcal{F}(T) \to$ Qcoh(T).

根据叠化的性质知, Rep$(\mathcal{G}_{S:G}) \simeq$ Rep$(S : G)$.

回忆一个 gerbe 是取值在广群中的叠, 使得其中任意两个对象都是局部同构的.

可以证明 $\mathcal{G}_{S:G}$ 是一个 gerbe 当且仅当态射 $(s, b) : G \to S \times S$ 是 fpqc 拓扑下的覆盖.

此时称广群 G 是传递的.
由传递性知每个 G 的表示都是 S 上局部自由的层.

淡中范畴

这里采用Deligne 1990中的记号.

定义.

设 k 为域, 称一个 k-**张量范畴** (tensor category) 为 k-线性范畴 $\mathcal{C}$ 及函子 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 满足:

1. $(\mathcal{C}, \otimes)$ 为对称幺半范畴并有单位 $\mathbb{1}$.
2. 对所有 $X \in \mathcal{C}$, 存在对象 $X^\vee$ 及态射 $\delta : \mathbb{1} \to X^\vee \otimes X$ 和 $\mathrm{ev} : X \otimes X^\vee \to \mathbb{1}$ 满足:
$$X \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\delta} X \otimes X^\vee \otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} X \quad \text{和} \quad X^\vee \xrightarrow{\delta\otimes\mathrm{id}} X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}} X^\vee$$
均为同构.
3. $\mathcal{C}$ 为阿贝尔范畴.
4. 态射 $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, \mathbb{1})$ 为同构.

淡中范畴 (续)

定义.

- 对于两个满足条件 (1) 的范畴 $\mathcal{T},\mathcal{T}'$, 函子 $F:\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ 为**张量函子** ($\otimes$-functor) 如果
  - 保持乘法即有同构 $F(X)\otimes F(Y)\to F(X\otimes Y)$,
  - 保持结合律, 交换律以及单位.
- 一个张量范畴 $\mathcal{T}$ 上的**纤维函子** (fiber functor) 是一个正合的张量函子 $F:\mathcal{T}\to \mathrm{Qcoh}(S)$ 其中 S 为 k-概型.
- 称一个张量范畴 $\mathcal{T}$ 为**淡中范畴** (tannakian category) 如果存在一个纤维函子 $\omega:\mathcal{T}\to \mathrm{Qcoh}(S)$ 使得 $S\neq\emptyset$.

若 $u:T\to S$ 为 k-概型态射, $\omega:\mathcal{T}\to\mathrm{Qcoh}(S)$ 纤维函子.
则 $u^*\omega:\mathcal{T}\to\mathrm{Qcoh}(T)$ 也为纤维函子.
因此任意淡中范畴 $\mathcal{T}$ 上总存在一个纤维函子
$\omega:\mathcal{T}\to\mathrm{Vect}(K)$, 其中 K 为 k 上的代数闭域.

纤维函子的自同构

定义.

$\mathcal{T}$: 淡中范畴, $\omega_1, \omega_2 : \mathcal{T} \to \mathsf{Qcoh}(S)$: 纤维函子,
用 $\mathrm{Isom}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ 表示 ω_1 到 ω_2 的同构所构成的集合.
用 $\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ 表示 $(\mathsf{Sch}/S)_{\mathrm{fpqc}}$ 上的层:

$$\underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)(u : T \to S) = \mathrm{Isom}_T^{\otimes}(u^*\omega_1, u^*\omega_2)$$

被 S 上的一个仿射概型所表示. 记 $\underline{\mathrm{Aut}}_S^{\otimes}(\omega) = \underline{\mathrm{Isom}}_S^{\otimes}(\omega, \omega)$.
对于一个淡中范畴 $\mathcal{T}$ 上的两个纤维函子 $\omega_i : \mathcal{T} \to S_i, i = 1, 2$.
定义 $\underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ 为 $\underline{\mathrm{Isom}}_{S_1 \times S_2}^{\otimes}(\mathrm{pr}_1^*\omega_1, \mathrm{pr}_2^*\omega_2)$, 及
$\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega) = \underline{\mathrm{Isom}}_k^{\otimes}(\omega, \omega)$.

定理

定理. (Deligne 1990)

$\mathcal{T}$: k 上的淡中范畴, $\omega : \mathcal{T} \to \mathrm{Qcoh}(S)$: 纤维函子, 其中 $S/k \neq \emptyset$. 则

- 广群 $\underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)$ 在 $S \times S$ 上忠实平坦.
- ω 诱导范畴同构 $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(S : \underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega))$.
- 反过来, 设 G 为 $S \neq \emptyset$ 上的广群,
  在 $S \times S$ 上仿射且忠实平坦.
  设 ω 为 $\mathrm{Rep}(S : G)$ 上忘记 G 作用的纤维函子,
  则 ω 诱导广群同构: $G \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}_k^{\otimes}(\omega)$.

证明简述

定理. (Barr-Back)

设 (L, R) 为一对伴随函子, 给出映射 $LR \to \mathrm{id}, \mathrm{id} \to RL$,
记 $F = LR$, 则 $LA \to LRLA = F(LA)$ 给出 LA 的 F 余作用.

如果 $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足对任意两个态射 $(f, g) : A \rightrightarrows A'$ 有核当 (Lf, Lg) 有核, 且若 $K = \ker(f, g)$ 则 $LK = \ker(Lf, Lg)$.

则 L 给出了 $\mathcal{A}$ 到具有 F 余作用的 $\mathcal{B}$ 的对象的范畴等价.

例

设 ${}_AM_B$ 为 (A, B) 双模, 在 A 上忠实平坦, 在 B 上投影且有限型, 则作为 B 模对偶 ${}_BM_A^\vee$ 是 (B, A) 双模.

令 $L : E \to E \otimes_A {}_AM_B$ 为右 A 模到右 B 模的函子, 其右伴随 $R : F \to F \otimes_B {}_BM_A^\vee$, 满足 Barr-Back 定理条件, 这给出右 A 模到具有 ${}_BM_A^\vee \otimes_A {}_AM_B$ 的余作用的右 B 模的范畴等价.

证明简述 (续)

k: 交换环, B_1, B_2: k 代数. $\omega_i : \mathcal{C} \to (B_i)_{\mathrm{ptf}}$ 为函子,
其中 $(B_i)_{\mathrm{ptf}}$ 指右 B_i 模且射影有限型.

定义:(B_1, B_2) 双模 $L_k(\omega_1, \omega_2)$ 具有以下泛性质:
对任意 $X \in \mathcal{C}$, 均有态射 $\omega_1(X)^\vee \otimes \omega_2(X) \to L_k(\omega_1, \omega_2)$
且对任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, 有对应的交换图表.

构造: 使用余均衡子.

泛性质给出典范态射 $L_k(\omega_1, \omega_3) \to L_k(\omega_1, \omega_2) \otimes L_k(\omega_2, \omega_3)$.
显然它满足结合律.

若记 $L_k(\omega) = L_k(\omega, \omega)$, 则这给出余乘法. 赋值映射给出余单位.
此外, $\omega(X)^\vee \otimes \omega(X) \to L_k(\omega)$ 给出 $\omega(X) \to \omega(X) \otimes L_k(\omega)$
即 $L_k(\omega)$ 在 $\omega(X)$ 上的余作用.

证明简述 (续)

命题.

设 k 是一个域, $\mathcal{A}$ 是一个 k-线性 *Abel* 范畴, 使得其对象有限长, 且 Hom 有限维.
对于 k 代数 B, $\omega : \mathcal{A} \to (B)_{\mathrm{ptf}}$ 为正合且忠实的函子,
则 ω 给出 $\mathcal{A}$ 到具有 $L_k(\omega)$ 余作用的有限型右 B 模的范畴等价.

证明.

对于 $X \in \mathcal{A}$, 可以证明存在环 A 使得 $\langle X \rangle \simeq (A)_{\mathrm{coh}}$. 记 ${}_AM_B = \omega(A)$, 利用 ω 是正合的可以证得 $\omega|\langle X \rangle$ 恰为映射 $E \to E \otimes_A {}_AM_B$.
由于 ω 是正合且忠实的, 故 M 在 A 上忠实平坦, 从而 $L_k(\omega|\langle X \rangle)$ 给出范畴等价.

证明简述 (续)

证明 (续).

对于 $Y \in \langle X \rangle$ 给出 $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$.
经过一番论证, 可以证明 $L_k(\omega|\langle Y \rangle) \to L_k(\omega|\langle X \rangle)$ 为单射, 且余核在 B 上平坦.
因为范畴 $\mathcal{A}$ 可以写作 $\langle X \rangle$ 的滤向极限, 而 $L_k(\omega)$ 也是 $L_k(\omega|\langle X \rangle)$ 的归纳极限. 这就给出了结论. $\square$

当范畴 $\mathcal{A}$ 具有幺半结构, 且 ω 为一个张量函子, 由此可以给出 $L_k(\omega_1, \omega_2) \otimes L_k(\omega_1, \omega_2) \to L_k(\omega_1, \omega_2)$.
若 $\mathcal{A}$ 同时是交换的且具有单位元, 则 $L_k(\omega_1, \omega_2)$ 是一个交换的 B 代数. 此时 $\operatorname{Spec} L_k(\omega_1, \omega_2)$ 表示了函子 $\underline{\operatorname{Hom}}_S^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$, 其中 $S = \operatorname{Spec} B$.

证明简述 (续)

最后要证明这样构造出来的是忠实平坦的.

对一个淡中范畴 $\mathcal{T}$ 及两个函子 $T_i : \mathcal{C} \to \mathcal{T}$, 类似地定义 $\Lambda_{\mathcal{T}}(T_1, T_2)$ 为 $T_1(X)^\vee \otimes T_2(X)$ 的余尾 (coend), 为 $\mathrm{Ind}(\mathcal{T})$ 中的对象. 类似地, 设 $\Lambda_k(T_1, T_2) = \Lambda_{\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}}(T_1 \times \mathbb{1}, \mathbb{1} \times T_2)$.

取 $T : \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, 则 $T(\Lambda_k(\mathrm{id}, \mathrm{id})) = \Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{id}, \mathrm{id})$, 且 $\omega(\Lambda_k(\mathrm{id}, \mathrm{id})) = L_k(\omega)$.

利用 $\mathrm{ev} : X^\vee \otimes X \to \mathbb{1}$ 给出 $\Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{id}, \mathrm{id}) \to \mathbb{1}$,
以及 $\mathbb{1} \to \Lambda_{\mathcal{T}}(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ 说明其不为零.

最后只需说明对于淡中范畴 $\mathcal{T}$ 及 $S = \mathrm{Spec}\, B$ 上的纤维函子 ω, 只要 $X \in \mathrm{Ind}(\mathcal{T})$ 不为零, 则 $\omega(X)$ 在 S 上忠实平坦.

目录

预备

k: 代数闭域, G: k 上的约化群.
设 G 对应的根数据为 $(X^\bullet, X_\bullet, \Delta, \Delta^\vee)$,
记 $(X_\bullet, X^\bullet, \Delta^\vee, \Delta)$ 对应的代数群为 $\widehat{G}$.

A 为一个特征零的域, 满足合适的上同调的系数.
如 $A = \mathbb{Q}_\ell$ 或 $k = \mathbb{C}, A = \mathbb{Q}$.

$F = k((t)), \mathcal{O} = k[[t]]$. 对于一个 k 上的环 R, 记
$R_F = R((t)), R_\mathcal{O} = R[[t]]$.

$G_F, G_\mathcal{O}$ 分别为 $(\mathsf{Aff}_k)_{\mathrm{fpqc}}$ 上的层:
$G_F(R) = G(R_F), G_\mathcal{O}(R) = G(R_\mathcal{O})$.

仿射 Grassmannian

可以证明 $G_{\mathcal{O}}$ 被一个概型所表示, 而 G_F 被一个 Ind-概型所表示.
令 $Gr_G = G_F/G_{\mathcal{O}}$. 它也被一个 Ind-概型所表示.

事实上, 将 G 嵌入到 GL_n 中, 给出 Gr_G 到 Gr_{GL_n} 中的嵌入.
对于 GL_n, 可以直接构造 Gr_{GL_n} 为
一族 Grassmannian 的闭子概型的归纳极限.

Gr_G 的另一个定义: 使用 Beauville-Laszlo 定理
设 X 为一条曲线, $x \in X$ 为一个光滑的点, $X^* = X \backslash \{x\}$.
对于环 R, $X_R = X \otimes_k R$.

$$Gr_G(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \middle| \begin{array}{l} \mathcal{E}\text{是}X_R\text{上的}G\text{-回旋子 (torsor)} \\ \beta : \mathcal{E}|_{X_R^*} \to \mathcal{E}^\circ|_{X_R^*}\text{为一个同构} \end{array} \right\} \Big/ \text{isom}$$

$G_{\mathcal{O}}$ 的作用

设 $\mathrm{ev} : G_{\mathcal{O}} \to G$ 为将 t 映为 0 的态射.
取 (B, T) 为一个 Borel 对, 而 $I = \mathrm{ev}^{-1}B$ 为 G_F 的 Iwahori 子群,
于是 $G_{\mathcal{O}}$ 为 Parahori 子群. 这给出 Cartan 分解:
$G_{\mathcal{O}} \backslash G_F / G_{\mathcal{O}} = W \backslash (X_\bullet \rtimes W)/W = X_\bullet^+$.

对于 $\lambda \in X_\bullet$, 给出 $\mathbb{G}_m \to T$ 进而 $\mathbb{G}_{m,F} \to T_F$.
记 t^λ 为 $t \in \mathbb{G}_{m,F}$ 的像.

$G_{\mathcal{O}}$ 左乘作用在 Gr_G 上, 其轨道由 $X_\bullet^+$ 给出.

对于 $\lambda \in X_\bullet^+$, $G_{\mathcal{O}} t^\lambda G_{\mathcal{O}} / G_{\mathcal{O}}$ 给出了 $G_{\mathcal{O}}$ 的所有轨道.

可以证明 $Gr_G^\lambda = G_{\mathcal{O}} t^\lambda G_{\mathcal{O}} / G_{\mathcal{O}}$ 是光滑且单连通的,
因此 $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(Gr_G, A)$ 中的单对象由 $IC_{\overline{Gr_G^\lambda}}$ 所给出.

卷积

考虑映射

$$Gr_G \times Gr_G \xleftarrow{p} G_F \times Gr_G \xrightarrow{q} G_F \times^{G_{\mathcal{O}}} Gr_G = Gr_G \tilde{\times} Gr_G \xrightarrow{m} Gr_G.$$

对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(Gr_G, A)$, 存在唯一 $Gr_G \tilde{\times} Gr_G$ 上的层 $\mathcal{F} \tilde{\boxtimes} \mathcal{G}$ 使得 $p^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) = q^*(\mathcal{F} \tilde{\boxtimes} \mathcal{G})$.

记 $\mathcal{F} \star \mathcal{G} = m_*(\mathcal{F} \tilde{\boxtimes} \mathcal{G})$, 称作 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 的卷积.

卷积

考虑映射

$$Gr_G \times Gr_G \xleftarrow{p} G_F \times Gr_G \xrightarrow{q} G_F \times^{G_\mathcal{O}} Gr_G = Gr_G \tilde{\times} Gr_G \xrightarrow{m} Gr_G.$$

对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(Gr_G, A)$, 存在唯一 $Gr_G \tilde{\times} Gr_G$ 上的层 $\mathcal{F} \tilde{\boxtimes} \mathcal{G}$ 使得 $p^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) = q^*(\mathcal{F} \tilde{\boxtimes} \mathcal{G})$.

记 $\mathcal{F} \star \mathcal{G} = m_*(\mathcal{F} \tilde{\boxtimes} \mathcal{G})$, 称作 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 的卷积.

几何佐竹等价

- $\mathcal{F} \star \mathcal{G} \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(Gr_G, A)$,
- 这给出 $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(Gr_G, A)$ 的淡中范畴的结构,
- 上同调函子 $H(Gr_G, -) : \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(Gr_G, A) \to \mathrm{Vect}(A)$ 给出该范畴到 $\mathrm{Rep}(\widehat{G}_A, A)$ 的淡中范畴之间的等价.

半单

第一步是证明范畴 $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(Gr_G, A)$ 是一个半单范畴.

对于 $\lambda \in X_\bullet^+$, 记 $IC_\lambda = IC_{\overline{Gr_G^\lambda}}$.
只需证明 $\mathrm{Hom}(IC_\lambda, IC_\mu[1]) = 0$ 对任意 $\lambda, \mu \in X_\bullet^+$.

这是通过以下命题结合一点同调代数得到:

命题.

- $\overline{Gr_G^\lambda} = \sqcup_{\nu \le \lambda} Gr_G^\nu, \quad \dim \overline{Gr_G^\lambda} = \dim Gr_G^\lambda = \langle 2\rho, \lambda \rangle$, 其中 2ρ 为所有正根之和.
- $\mathcal{H}^i(IC_\lambda) = 0$ 除非 i 和 $\langle 2\rho, \lambda \rangle$ 同奇偶.

半单 (续)

对于第一部分,

证明.

- 方法一: 将 G_F 看作 Kac-Moody 群, 而 $G_\mathcal{O}$ 为 Parahori 子群, 使用旗簇的一般结果.
- 关于维数部分, 方法二: 直接计算在点 t^λ 处的切空间.
  方法三: 找到 Gr_G^λ 的一个开子群, 其由一部分根所对应的单参子群所构成.
- 关于闭包部分, 方法二:
  对于单根 α 满足 $\lambda, \lambda - \alpha^\vee \in X_\bullet^+$, 构造一条闭曲线 $C_{\lambda,\alpha^\vee}$, 使得 $C_{\lambda,\alpha} \backslash \{t^{\lambda-\alpha^\vee}\} \subset Gr_G^\lambda$.
  构造方法: 对于 SL_2 的情况直接计算, 然后将结果嵌入到一般的群中. $\square$

半单 (续)

对于第二部分,

证明.

利用 Bruhat 分解, $Gr_G = \sqcup_{w \in \widetilde{W}/W} IwG_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$.

取 $w_\lambda \in Wt^\lambda W$ 使得 $Iw_\lambda G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$ 在 Gr_G^λ 中开.
因此 $IC_\lambda = IC_{Iw_\lambda G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}}$.

考虑 $Fl_G = G_F/I \to Gr_G$, 这是一个 G/B^- 纤维丛.
将 $Iw_\lambda G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$ 拉回得到 $Iw_\lambda w_\circ I/I$.

最后, 为了证明 $IC_{IwI/I}$ 满足条件, 考虑 $\overline{IwI/I}$ 的 Bott-Samelson 消解, 其每个纤维均为一个仿射空间.

根据分解定理知结论成立. □

卷积

第二步要证明当 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(Gr_G)$ 时，$\mathcal{F} \star \mathcal{G}$ 仍然在 $\mathsf{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(Gr_G)$ 中.

这是通过仔细分析态射 $m : Gr_G \tilde{\times} Gr_G \to Gr_G$ 的每个纤维的维数得到的.

权函数

对于 $U=[B,B]$ 为 B 的幂幺根, $\lambda\in X_\bullet$,
定义 $S_\lambda=U_Ft^\lambda G_\mathcal{O}/G_\mathcal{O}$ 为 U_F 在 Gr_G 上作用的轨道.
可以证明有以下结果:

命题.

- $\overline{S_\lambda}=\sqcup_{\nu\leq\lambda}S_\nu$;
- 记 $2\rho^\vee$ 为所有正余根之和, 它给出 $\mathbb{G}_m\to T\hookrightarrow G$ 诱导 $\mathbb{G}_m$ 在 Gr_G 上的作用. 则

$$S_\lambda=\left\{x\in Gr_G\,\middle|\,\lim_{s\to 0}2\rho^\vee(s)\cdot x=t^\lambda\right\}.$$

类似定义 U_F^- 的轨道

$$T_\lambda=\left\{x\in Gr_G\,\middle|\,\lim_{s\to\infty}2\rho^\vee(s)\cdot x=t^\lambda\right\}.$$

权函数 (续)-Braden's hyperbolic localization theorem

定义.

设 $\mathbb{G}_m$ 作用代数簇 X 上, 作用记为 $\rho : \mathbb{G}_m \times X \to X$, $S \in \mathrm{D}(X)$ 被称作是弱等变的, 如果 $\rho^* S = L \boxtimes S$, 其中 L 为 $\mathbb{G}_m$ 上局部系.

定理. (Braden 2003)

设 X 为正规的. 令 $F = X^{\mathbb{G}_m}$ 为不动点,

$$X^+ = \left\{ x \in X \middle| \lim_{s \to 0} s \cdot x \text{ exists} \right\}, \quad X^- = \left\{ x \in X \middle| \lim_{s \to \infty} s \cdot x \text{ exists} \right\}.$$

记 $f^\pm : F \to X^\pm, g^\pm : X^\pm \to X, \pi^\pm : X^\pm \to F$.
若 $S \in \mathrm{D}(X)$ 为 $\mathbb{G}_m$-弱等价的, 则有以下同构:

- $(f^\pm)^* S = (\pi^\pm)_* S, (f^\pm)^! S = (\pi^\pm)_! S,$
- $(f^-)^* (g^-)^! S \to (f^+)^! (g^+)^* S.$

权函数 (续)

将该定理用到 $\overline{Gr_G^\lambda}$ 中, 则有

$$H^k_{T_\mu}(Gr_G, IC_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^k_c(S_\mu, IC_\lambda).$$

命题.

上式在 $k \neq \langle 2\rho, \mu\rangle$ 时为零.

证明.

首先使用归纳法证明 $\lambda \in X_\bullet^+, \mu \in X_\bullet$ 时有
$\dim \overline{Gr_G^\lambda} \cap S_\mu = \langle \rho, \lambda + \mu\rangle$.
利用错致层的性质便可以得到当 $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(Gr_G)$ 时
$H^k_c(S_\mu, \mathcal{F}) = 0, k > \langle 2\rho, \mu\rangle$.
同理有 $H^k_{T_\mu}(Gr_G, \mathcal{F}) = 0, k < \langle 2\rho, \mu\rangle$.
结合上述同构得证. $\square$

权函数 (续)

使用归纳法可以证明以下结果: 对于 $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(Gr_G)$

- $H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(S_\mu, \mathcal{F}) = H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\overline{S_\mu}, \mathcal{F})$,
- $H_c^{\langle 2\rho,\nu\rangle}(\overline{S_\mu}, \mathcal{F}) = H_c^{\langle 2\rho,\nu\rangle}(\overline{S_\nu}, \mathcal{F}), \nu \leq \mu$,
- $H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle+\mathrm{odd}}(\overline{S_\mu}, \mathcal{F}) = 0$.

以及对于 T_μ 的类似结果.

因此, 若取 $F_\mu = H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(S_\mu, -)$, 则有 $H(Gr_G, \mathcal{F}) = \bigoplus_{\mu \in X_\bullet} F_\mu(\mathcal{F})$.

这是直和分解, 因为有以下图表:

$$\begin{tikzcd}
H_{T_\mu}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(Gr_G, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & H^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(Gr_G, \mathcal{F}) \arrow[r] & H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(\overline{S_\mu}, \mathcal{F}) \\
H_{T_\mu}^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(Gr_G, \mathcal{F}) \arrow[rr, "\sim"] & & H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(S_\mu, \mathcal{F}) \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

相容性

期望证明上述的直和分解与层的卷积是相容的.

首先仿射 Grassmannian 的模空间的定义可以延拓到一条光滑曲线 X 上, 即可以定义 $Gr_{G,X}$ 为

$$Gr_{G,X}(R) = \left\{ (x, \mathcal{E}, \beta) \middle| \begin{array}{l} x \in X(R), \mathcal{E}\text{是}X_R\text{上的}G\text{-回旋子} \\ \beta : \mathcal{E}|_{X_R \setminus \Gamma_x} \to \mathcal{E}^\circ|_{X_R \setminus \Gamma_x}\text{为同构} \end{array} \right\} \Big/ \text{isom}$$

类似得到 Gr_{G,X^2}, 它们称为 Beilinson-Drinfeld Grassmannian. 可以验证以下结果:

- $Gr_{G,X^2}|_{X^2 \setminus \Delta} = (Gr_{G,X} \times Gr_{G,X})|_{X^2 \setminus \Delta}$.
- $Gr_{G,X^2}|_{\Delta} \simeq Gr_{G,X}$.

相容性 (续)

类似可以定义 $Gr_{G,X}\tilde{\times}Gr_{G,X}\xrightarrow{m}Gr_{G,X^2}$.
其在 $U=X^2\backslash\Delta$ 上为恒同, 在 Δ 上为卷积.

考虑 $X=\mathbb{A}^1$, 其基本群平凡, 故 $Gr_{G,X}=Gr_G\times X$,
因此一个 $\mathcal{F}\in\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(Gr_G)$ 给出 $\mathcal{F}_X\in\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O},X}}(Gr_{G,X})$.
同样可以定义相对版本的卷积, 即可以有 $\mathcal{F}_X\star_X\mathcal{G}_X$.
可以看出, 其在 Δ 上的纤维为 $\mathcal{F}\star\mathcal{G}[2]$,
其在 U 上的纤维为 $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}[2]$.
这里利用了 Gr_{G,X^2} 的结构中的同构.

$\mathbb{G}_m$ 在 $Gr_{G,X}\tilde{\times}Gr_{G,X}$ 上的不动点, 由 $(t^{\mu_1},t^{\mu_2})_{X^2}$ 所给出.
考虑它们在 m 下的像, 由于在 Δ 的部分被粘起来了,
故所有连通分支由 $\mu\in X_\bullet$ 给出, 记它们为 $S_\mu(X^2)$.

相容性 (续)

$S_\mu(X^2)$ 在 Δ 上的纤维是 S_μ，
而在 U 上的纤维为 $\displaystyle\coprod_{\mu_1+\mu_2=\mu} S_{\mu_1} \times S_{\mu_2}$.

考虑 $\mathcal{F}_X \star_X \mathcal{G}_X$ 及其上同调 $\mathcal{H}_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle-2}(S_\mu(X^2)/X^2, \mathcal{F}_X \star_X \mathcal{G}_X)$.
其在 Δ 上的纤维是 $H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(S_\mu, \mathcal{F} \star \mathcal{G}) = F_\mu(\mathcal{F} \star \mathcal{G})$.
而在 U 上的纤维为

$$H^{\langle 2\rho,\mu\rangle}\Big(\coprod_{\mu_1+\mu_2=\mu} S_{\mu_1} \times S_{\mu_2}, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}\Big) = \bigoplus_{\mu_1+\mu_2=\mu} F_{\mu_1}(\mathcal{F}) \otimes F_{\mu_2}(\mathcal{G}).$$

相容性 (续)

$S_\mu(X^2)$ 在 Δ 上的纤维是 S_μ,
而在 U 上的纤维为 $\displaystyle\bigsqcup_{\mu_1+\mu_2=\mu} S_{\mu_1}\times S_{\mu_2}$.

考虑 $\mathcal{F}_X \star_X \mathcal{G}_X$ 及其上同调 $\mathcal{H}_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle-2}(S_\mu(X^2)/X^2, \mathcal{F}_X \star_X \mathcal{G}_X)$.
其在 Δ 上的纤维是 $H_c^{\langle 2\rho,\mu\rangle}(S_\mu, \mathcal{F}\star\mathcal{G}) = F_\mu(\mathcal{F}\star\mathcal{G})$.
而在 U 上的纤维为

$$H^{\langle 2\rho,\mu\rangle}\Big(\bigsqcup_{\mu_1+\mu_2=\mu} S_{\mu_1}\times S_{\mu_2}, \mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}\Big) = \bigoplus_{\mu_1+\mu_2=\mu} F_{\mu_1}(\mathcal{F})\otimes F_{\mu_2}(\mathcal{G}).$$

故只需证明这样的层是局部自由的. 而这是因为以下两点:

- 直和分解的图表在线对于 X^2 的情况仍然成立. 这是因为层同态是同构 (单射, 满射) 当且仅当其在每个纤维上成立.
- 层 $\mathcal{H}^k(Gr_{G,X^2}, \mathcal{F}_X \star_X \mathcal{G}_X)$ 是局部自由的.
  这是通过两次态射分别前推都是局部自由层.

得到根数据

记 $\mathsf{Sat}_G = \mathsf{Perv}_{G_\mathcal{O}}(Gr_G)$.

由于 $F = H(Gr_G, -)$ 将 Sat_G 映到
超向量空间 $\mathsf{SVect}(A)$,
简单修改交换限制得到 $\mathsf{Vect}(A)$ 的纤维函子.

淡中对偶得到 Sat_G 同构于 $\mathsf{Rep}(\widetilde{G}, A)$.

由于 Sat_G 存在张量生成元, 故 $\widetilde{G}$ 为代数的.

由于 Sat_G 不存在对象 X, 使得 $\langle X\rangle$ 在张量下不变,
故 G 是连通的.

由于范畴 Sat_G 是半单的知 $\widetilde{G}$ 为约化群.

需要将 $\widetilde{G}$ 和 $\widehat{G}$ 等同起来.

得到根数据 (续)

当 T 为环面 $\mathbb{G}_m^n$ 时,
容易得到 Gr_T 的约化结构为以 $X_\bullet(T)$ 为指标的点.
从而 Sat_T 为以 $X_\bullet(T)$ 为指标的向量空间.
此时结论 $\widetilde{T} = \widehat{T}$ 显然成立.

直和分解 $F = \bigoplus_{\mu \in X_\bullet} F_\mu$ 给出函子分解:
$\mathsf{Sat}_G \to \mathsf{Vect}_{X_\bullet}(A) \to \mathsf{Vect}(A)$. 从而给出群同态 $\widehat{T} \to \widetilde{G}$.

由于 $\widetilde{G}$ 的所有表示以 $X_\bullet^+$ 为指标, 故这是 $\widetilde{G}$ 的极大环面.

得到根数据 (续)

考虑 $2\rho \in X^\bullet = \widetilde{X_\bullet}$, 作为一个余根,
给出 $\widetilde{G}$ 的正根, 进而给出一个 Borel 子群, 包含 $\widehat{T}$.

取 $\lambda \in X_\bullet^+$, 根据 IC_λ 的计算得 λ 是 $F(IC_\lambda)$ 的最高权.
反之, 对于 $\widetilde{G}$ 的权为 λ 的最高权单表示, 也一定来自于 $X_\bullet^+$.

因此 $X_\bullet^+ = \widetilde{X^{\bullet +}}$.

由前面计算得, $F(IC_\lambda)_\mu$ 非零仅当 $\mu \leq \lambda$. 这表明 $\widetilde{X^\bullet}$ 中的根晶格 (root lattice)$\widetilde{Q_+}$ 等同于 $Q_+^\vee$.

这些信息便可以完全确定 $\widetilde{G}$ 的根数据.

目录

绝对 Hodge 类

k: 特征为 0 的域, 闭包为 $\overline{k}$, Galois 群为 $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.
X: k 上光滑射影代数簇. 对任意素数 ℓ, $H_\ell(X)$: X 的 ℓ-进上同调,
$H_{\mathrm{dR}}(X)$: X 的 de Rham 上同调. $H_{\mathbb{A}}(X) = H_{\mathrm{dR}}(X) \times \prod_{\ell} H_\ell(X)$.

对任意嵌入 $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $H_\sigma(X)$ 为 $\sigma X = X \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C}$ 的 Betti 上同调.
比较定理给出同构: $H_\sigma(X) \otimes (\mathbb{C} \times \mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{A}}(\sigma X)$.
用 σ^* 表示嵌入 $H_\sigma(X) \hookrightarrow H_{\mathbb{A}}(\sigma X)$.

绝对 Hodge 类

k: 特征为 0 的域, 闭包为 $\bar{k}$, Galois 群为 $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.
X: k 上光滑射影代数簇. 对任意素数 ℓ, $H_\ell(X)$: X 的 ℓ-进上同调,
$H_{\mathrm{dR}}(X)$: X 的 de Rham 上同调. $H_{\mathbb{A}}(X) = H_{\mathrm{dR}}(X) \times \prod_\ell H_\ell(X)$.

对任意嵌入 $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $H_\sigma(X)$ 为 $\sigma X = X \otimes_{k,\sigma} \mathbb{C}$ 的 Betti 上同调.
比较定理给出同构: $H_\sigma(X) \otimes (\mathbb{C} \times \mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} H_{\mathbb{A}}(\sigma X)$.
用 σ^* 表示嵌入 $H_\sigma(X) \hookrightarrow H_{\mathbb{A}}(\sigma X)$.

定义.

$H^{2p}_{\mathbb{A}}(X)(p)$ 中的一个元素 t 称作**相对于 σ 的 Hodge 类**如果

$$\sigma^* t \in H^{2p}(\sigma X, \mathbb{Q})(p) \cap H^{p,p}(\sigma X).$$

$H^{2p}_{\mathbb{A}}(X)(p)$ 中的一个元素 t 称作**绝对 Hodge 类**如果
对于所有嵌入 $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ 都是相对于 σ 的 Hodge 类.

态射

用 $C^p_{\mathrm{AH}}(X)$ 表示 X 上的绝对 Hodge 类构成的 $\mathbb{Q}$ 线性空间. 对于 X, Y 为两个 k 上的光滑射影代数簇, $\dim X = n$, 定义

$$\mathrm{Mor}^p(X, Y) = C^{n+p}_{\mathrm{AH}}(X \times Y).$$

每个元素 $f \in \mathrm{Mor}^p(X, Y)$ 给出态射 $f : H^r(X) \to H^{r+2p}(Y)(p)$.

这些 $\mathrm{Mor}^p(X, Y)$ 是可以结合的:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}^p(X, Y) \times \mathrm{Mor}^q(Y, Z) &\to \mathrm{Mor}^{p+q}(X, Z)\\ (f, g) &\mapsto g \circ f = \mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}^*_{12} f \cdot \mathrm{pr}^*_{23} g).\end{aligned}$$

定义

让 V_k 表示 k 上的所有光滑射影代数簇 (不要求连通) 的范畴.
定义 CV_k 为如下范畴: 其对象为 $h(X), X \in \mathsf{V}_k$,
其态射为 $\mathrm{Hom}(h(X), h(Y)) = \mathrm{Mor}^0(X, Y)$.

显然这是一个 $\mathbb{Q}$-线性范畴, 且满足
$h(X \sqcup Y) = h(X) \oplus h(Y), h(X \times Y) = h(X) \otimes h(Y)$.
它具有显然的交换律和结合律, 并具有单位元 $\mathbb{1} = h(\mathrm{pt})$.

定义不正确的有效 (effective)motive 范畴 $\dot{\mathsf{M}}_k^+$ 为
CV_k 的伪阿贝尔化 (将幂等自同态的像加入到范畴中).

定义 (续)

考虑 $\mathbb{P}^1$, 则有 $h(\mathbb{P}^1) = h^0(\mathbb{P}^1) + h^2(\mathbb{P}^1) = h(\mathrm{pt}) + L$. 于是 $H(L) = \mathbb{Q}(-1)$, 此外

$$\mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M \otimes L, N \otimes L)$$

对任意有效的 motiveM, N.

将 L 的逆加入到该范畴中得到一个新的范畴:

定义.

不正确的 motive 范畴 $\dot{\mathsf{M}}_k$ 定义如下:

1. 其对象为 $(M, m), M \in \dot{\mathsf{M}}_k^+, m \in \mathbb{Z}$;
2. 其态射为
$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathsf{M}}_k}((M, m), (N, n)) = \mathrm{Hom}_{\dot{\mathsf{M}}_k^+}(M \otimes L^{r-m}, M \otimes L^{r-n})$$
对某个 $r \geq m, n$;
3. 其态射的复合为从 $\dot{\mathsf{M}}_k^+$ 诱导的.

张量范畴

命题.

范畴 $\dot{\mathsf{M}}_k$ 是半单的阿贝尔范畴.

证明.

利用 $H^r(X)$ 上的极化 Hodge 结构所给出的某种正性
可以证明 $\mathrm{Mor}^0(X,X)$ 是半单代数.
从而 $\mathrm{Hom}_{\dot{\mathsf{M}}_k^+}((h(x),p),(h(x),p)) = p\mathrm{Mor}^0(X,X)p$ 是半单代数
对所有幂等元 p 成立.
由Jannsen 1992中的 Lemma 2 知命题成立. □

张量范畴 (续)

命题.

范畴 $\dot{\mathsf{M}}_k$ 是张量范畴.

证明.

只需验证张量范畴定义中的第二条, 即刚性 (rigid) 的条件.
由于 L 的逆已经被加入了, 故只需考虑有效的部分.

对于 $h(X), X \in \mathsf{V}_k$ 的情况, 不妨设 X 是连通且维数为 n,
直接验证 $h(X)^\vee = h(X)(n)$,
其中 δ 由 $[\Delta_X]$ 给出, 而 ev 由杯积给出.

对于一个幂等元 $p \in \mathrm{Hom}(h(X), h(X))$,
其转置 ${}^{\mathrm{t}}p$ 给出 $h(X)^\vee$ 到自身的幂等元.
可以证明 $(h(X), p)^\vee = (h(X)^\vee, {}^{\mathrm{t}}p)$. $\square$

淡中范畴

注意到范畴 $\dot{\mathsf{M}}_k$ 并不是淡中范畴. 因为对于 $X \in \mathsf{V}_k$, 有 $\dim h(X) = \chi(X)$, 其不一定是非负整数, 如高亏格的曲线.

定义.

令

$$\dot{\phi} : M \otimes N \to N \otimes M, \quad \dot{\phi} = \oplus \dot{\phi}^{r,s}, \quad \dot{\phi}^{r,s} : M^r \otimes N^s \to N^s \otimes M^r$$

为 $\dot{\mathsf{M}}_k$ 上的交换限制. 将其换为如下的交换限制:

$$\phi : M \otimes N \to N \otimes M, \quad \phi = \oplus \phi^{r,s}, \quad \phi^{r,s} = (-1)^{rs} \dot{\phi}^{r,s}.$$

记新的到的范畴为 M_k, 称之为**正确的 motive 范畴**.

这是一个淡中范畴. 事实上, 各种上同调函子 $H_\ell, H_{\mathrm{dR}}, H_\sigma$ 都是它的纤维函子.

Lefschetz 迹公式

对于一个 k-张量范畴 $\mathcal{T}$, 及 $X \in \mathcal{T}, f : X \to X$, 定义 f 的迹为

$$\operatorname{tr} f = \mathbb{1} \xrightarrow{\delta} X^\vee \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} X^\vee \otimes X = X \otimes X^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathbb{1} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) = k.$$

考虑 $x \in \operatorname{Hom}(\mathbb{1}, X), y \in \operatorname{Hom}(X, \mathbb{1})$, 其给出 ${}^{\mathrm{t}}y \in \operatorname{Hom}(\mathbb{1}, X^\vee)$,
定义它们的配对, 记作 $\langle x, {}^{\mathrm{t}}y \rangle$
为 $x \otimes {}^{\mathrm{t}}y$ 在 $\mathrm{ev} : \operatorname{Hom}(\mathbb{1}, X \otimes X^\vee) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{1}, \mathbb{1})$ 中的像.
容易证明其也是 $x \circ y \in \operatorname{Hom}(X, X)$ 的迹.

Lefschetz 迹公式

对于一个 k-张量范畴 $\mathcal{T}$, 及 $X \in \mathcal{T}, f : X \to X$, 定义 f 的迹为

$$\operatorname{tr} f = \mathbb{1} \xrightarrow{\delta} X^\vee \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} X^\vee \otimes X = X \otimes X^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathbb{1} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) = k.$$

考虑 $x \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X), y \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{1})$, 其给出 ${}^{\mathrm{t}}y \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X^\vee)$,
定义它们的配对, 记作 $\langle x, {}^{\mathrm{t}}y \rangle$
为 $x \otimes {}^{\mathrm{t}}y$ 在 $\mathrm{ev} : \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X \otimes X^\vee) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, \mathbb{1})$ 中的像.
容易证明其也是 $x \circ y \in \mathrm{Hom}(X, X)$ 的迹.

将上式应用到 $X = V^\vee \otimes W$ 中, 考虑
$f \in \mathrm{Hom}(V, W) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X)$, $g \in \mathrm{Hom}(W, V)$, 定义 cg 为
${}^{\mathrm{t}}g$ 交换 $W^\vee$ 和 $V^{\vee\vee}$ 后的结果. (或使用 V 和 $V^{\vee\vee}$ 的同构)
前述结果给出给出 $\langle f, cg \rangle = \operatorname{tr}\left(g \circ f \in \mathrm{Hom}(V, V)\right)$.

Lefschetz 迹公式 (续)

对于维数为 n 的光滑射影代数簇 X, 根据 Deligne-Milne 的构造, 存在 $\pi_r \in \mathrm{Hom}(h(X), h(X))$ 为

$$h^r(X) \xrightarrow{\mathrm{id}} h^r(X), h^s(X) \xrightarrow{0} h^s(X), s \neq r.$$

且易知 ${}^{\mathrm{t}}\pi_r = \pi_{2n-r}$. 这表明

$$(h^r(X))^\vee = (h(X), \pi_r)^\vee = (h(X), \pi_{2n-r})(n) = h^{2n-r}(X)(n).$$

且 ev 由杯积给出.

Lefschetz 迹公式 (续)

对于维数为 n 的光滑射影代数簇 X, 根据 Deligne-Milne 的构造, 存在 $\pi_r \in \mathrm{Hom}(h(X), h(X))$ 为

$$h^r(X) \xrightarrow{\mathrm{id}} h^r(X), h^s(X) \xrightarrow{0} h^s(X), s \neq r.$$

且易知 ${}^{\mathrm{t}}\pi_r = \pi_{2n-r}$. 这表明

$$(h^r(X))^\vee = (h(X), \pi_r)^\vee = (h(X), \pi_{2n-r})(n) = h^{2n-r}(X)(n).$$

且 ev 由杯积给出.

将上述命题应用到 $h(X)$ 和 $h(Y)(i)$ 中来, 即取 $f \in C_{\mathrm{AH}}^{n+i}(X \times Y)$, $g \in C_{\mathrm{AH}}^{m-i}(Y \times X)$.
此时 cg 恰为 ${}^{\mathrm{t}}g \in C_{\mathrm{AH}}^{m-i}(X \times Y)$. 故上述命题表明

$$\langle f, {}^{\mathrm{t}}g \rangle = \mathrm{tr}\left(g \circ f \in \mathrm{Hom}(h(X), h(X))\right).$$

推论

考虑 X 定义在有限域 $\mathbb{F}_q$ 上, 假设标准猜想 B 成立, 则有

$$\sharp(X(\mathbb{F}_{q^n})) = \langle \Gamma_{\mathrm{Fr}_q^n}, \Delta \rangle = \dot{\mathrm{tr}}\left(\mathrm{Fr}_q^n | h(X)\right).$$

其中 Fr_q 为 Frobenius 映射.

于是 Zeta 函数可以写成:

$$\begin{aligned} Z(X,t) &= \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\sharp(X(\mathbb{F}_{q^n}))}{n} t^n\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}\left(\dot{\mathrm{tr}}\left(\mathrm{Fr}_q^n | h(X)\right)\right) t^n\right) \\ &= \exp\left(-\dot{\mathrm{tr}}\left(\ln(1-\mathrm{Fr}_q t)\middle| h(X)\right)\right) \\ &= \dot{\det}\left(1-\mathrm{Fr}_q t \middle| h(X)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

命题.

设 V 为淡中范畴 $\mathcal{T}$ 中的对象, 其维数为 n, $\phi : V \to V$ 为一个自同态. 考虑 ϕ 的特征多项式

$$\chi_\phi(\lambda) = \det\left(\lambda - \phi \middle| V\right) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n.$$

则有 $a_i = \operatorname{tr}\left(\phi^{\otimes i} \middle| \wedge^i V\right)$.

证明.

回忆行列式的定义 $\det\left(\phi \middle| V\right) = \operatorname{tr}\left(\phi^{\otimes n} \middle| \wedge^n V\right)$.
将其应用到 $\lambda - \phi$ 上, 有

$$f_i = \sum_{\sigma = \mathfrak{S}_n / (\mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_{n-i})} \sigma(\phi^{\otimes i} \otimes \mathrm{id}^{\otimes n-i}),$$

$$a_i = \operatorname{tr}\left(f_i \middle| \wedge^n V\right).$$

断言.

只要 V 在某个张量范畴中就有

$$\operatorname{tr}\left(f_i\middle|\wedge^n V\right)=\operatorname{tr}\left(\phi^{\otimes i}\middle|\wedge^i V\right)\binom{\dim V-i}{n-i}.$$

证明.

利用Deligne 1990中的 Lemme 7.2 可知该等式两边均为以 $\operatorname{tr}(\mathrm{id})=\dim V,\operatorname{tr}(A),\ldots,\operatorname{tr}(A^i)$ 为变元的多项式.
而当 $V=\mathbb{1}^m$, m 为正整数时 $\dim V=m$, 可以直接验证等式两边相等, 从而这两个多项式是相等的. □

推论.

对于一个淡中范畴 $\mathcal{T}$ 中的对象 V 及其自同态 $f\in\operatorname{Hom}(V,V)$, 利用断言的 $i=1$ 的情况并利用 $\exp$ 将和变为积得到

$$\exp\left(\operatorname{tr}\left(f\middle|V\right)\right)=\det\left(\exp f\middle|V\right).$$

命题.

设 M 是一个张量范畴 $\mathcal{T}$ 中的对象，$f : M \to M$ 为一个自同态，则有以下式子成立:

$$\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n \operatorname{tr}\left(f^{\otimes n}\big|\wedge^n M\right)t^n\right)\left(\sum_{m\geq 0}\operatorname{tr}\left(f^{\otimes m}\big|\mathrm{Sym}^m M\right)t^m\right)=1.$$

证明.

将该幂级数展开，则只需证明对任意正整数 l，均有

$$\bigoplus_{\substack{0\leq n\leq l\\ n \text{ even}}} \wedge^n M\otimes \mathrm{Sym}^{l-n}M = \bigoplus_{\substack{0\leq n\leq l\\ n \text{ odd}}} \wedge^n M\otimes \mathrm{Sym}^{l-n}M.$$

考虑以下复形 (容易验证相邻两映射复合为零):

$$0\to\wedge^l M\to\wedge^{l-1}M\otimes\mathrm{Sym}^1 M\to\cdots\to\mathrm{Sym}^l M\to 0,$$

类似地给出该序列反方向的箭头，以证明这是一个正合列.

证明 (续).

对于正整数 n, 记 $p_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma, q_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\sigma$, 分别对应 Sym^n 和 $\wedge^n$ 的幂等元.

考虑图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \wedge^n M\otimes \mathrm{Sym}^m M \arrow[r] \arrow[dl] & \wedge^{n-1}M\otimes\mathrm{Sym}^{m+1}M \arrow[dl] \\
\wedge^{n+1}M\otimes\mathrm{Sym}^{m-1}M \arrow[r] & \wedge^n M\otimes\mathrm{Sym}^m M \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其左右两个态射的复合分别为 $q_np_mq_{n+1}p_m$ 和 $q_np_{m+1}q_np_m$. 容易得到它们的复合均为 0.
此外, 利用杨对称子的知识知它们在相差一个参数后都是幂等的.
最后使用以下引理: $\square$

引理.

$$q_np_m = \frac{n(m+1)}{m+n}q_np_{m+1}q_np_m + \frac{m(n+1)}{m+n}q_np_mq_{n+1}p_m.$$

结论

综合以上命题得到

推论.

设 V 是某个淡中范畴的对象，ϕ 是 V 的自同态，则结合上述两个命题知有下式成立：

$$\det\left(1-\phi t|V\right)^{-1}=\sum_{n\geq 0}\operatorname{tr}\left(\phi^{\otimes n}|\mathrm{Sym}^n V\right)t^n.$$

从而可以把 Zeta 函数写为

$$\begin{aligned}Z(X,t)&=\sum_{n\geq 0}\dot{\operatorname{tr}}\left(\mathrm{Fr}_q^{\otimes n}|\mathrm{Sym}^n h(X)\right)t^n,\\&=\sum_{n\geq 0}\dot{\operatorname{tr}}\left(\mathrm{Fr}_q|h(\mathrm{Sym}^n X)\right)t^n.\end{aligned}$$

一般化

可以定义 motivic Zeta 函数为系数在一个范畴中的幂级数:

$$Z(X,t) = \sum_{n\geq 0} h(\mathrm{Sym}^n X)t^n.$$

注意到 $\mathrm{tr}(\phi|h(X)) = \sum_i (-1)^i \,\mathrm{tr}\left(\phi|h^i(X)\right)$,
表明这和传统的结果是相同的.

由此, 对任意环同态 $K_0(\mathsf{M}_k) \to R$, 均可以计算其 Zeta 函数.
如 Betti 数 $b^i = \mathrm{tr}\left(\pi_i|h(-)\right)$,
特征 0 域上的 Hodge 数 $h^{p,q}$ 等.

例如 Göttsche 公式:

对于一个 $2n$ 维代数簇 X, 用 $P_{x,y}(X)$ 表示对称的 Hodge 数的生成函数, 即
$P_{x,y}(X) = \sum_{-n\leq i,j\leq n} h^{n+i,n+j}(X)x^i y^j$.

设 S 为一个曲面, $S^{(n)} = \mathrm{Sym}^n S = S^n/\mathfrak{S}_n$, 用 $S^{[n]}$ 表示 S 上 n 个点的 Hilbert 概型. $h^{i,j} = h^{i,j}(S)$, 则有等式:

$$\sum_{n\geq 0} P_{x,y}(S^{(n)})t^n = \frac{(1+y^{-1}t)^{h^{1,0}}(1+x^{-1}t)^{h^{0,1}}(1+xt)^{h^{2,1}}(1+yt)^{h^{1,2}}}{(1-x^{-1}y^{-1}t)^{h^{0,0}}(1-xy^{-1}t)^{h^{2,0}}(1-t)^{h^{1,1}}(1-xy^{-1}t)^{h^{0,2}}(1-xyt)^{h^{2,2}}},$$

$$\sum_{n\geq 0} P_{x,y}(S^{[n]})t^n = \prod_{i\geq 1} \frac{(1+y^{-1}t^i)^{h^{1,0}}(1+x^{-1}t^i)^{h^{0,1}}(1+xt^i)^{h^{2,1}}(1+yt^i)^{h^{1,2}}}{(1-x^{-1}y^{-1}t^i)^{h^{0,0}}(1-xy^{-1}t^i)^{h^{2,0}}(1-t^i)^{h^{1,1}}(1-xy^{-1}t^i)^{h^{0,2}}(1-xyt^i)^{h^{2,2}}}.$$