第二章、测度空间

§2.1 测度的定义与性质

- 设$\mathscr{E}$ 为集合系.
- 非负集函数, $\mu, \nu, \tau \cdots$, 指:

$$\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty].$$

- 可列可加性:

  若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, 两两不交, 且$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{E}$, 则

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

- 定义2.1.1. 设$\varnothing \in \mathscr{E}$. 若

$$\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$$

满足可列可加性, 且$\mu(\varnothing) = 0$, 则称μ 为$\mathscr{E}$ 上的测度.

- 若$\mu(A) < \infty, \forall A \in \mathscr{E}$, 则称$\mu$ 是有限的;
- 若$\exists A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$ 两两不交, 使得

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad 且 \quad \mu(A_n) < \infty, \ \forall n,$$

则称μ 是σ 有限的.

- 有限可加性:

  若$A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{E}$, 两两不交, 且$\sum_{i=1}^n A_i\in\mathscr{E}$, 则

$$\mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n \mu(A_i),$$

  则称非负集函数μ具有有限可加性.

- 可减性:

  若$A,B\in\mathscr{E}$ 且$A\subseteq B$, $B\backslash A\in\mathscr{E}$, $\mu(A)<\infty$, 则

$$\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A).$$

- 命题2.1.1. 测度具有有限可加性和可减性.
- 在可列可加性中取$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$. $B=A+B\backslash A$.

- 例1(counting measure). $\mu(A)=\#(A)$, $A\in\mathscr{T}_X$.
- 例2(点测度、分布列). $(X,\mathscr{F})$ 为可测空间,

$$\delta_x(A)=\mathbf{I}_A(x),\ A\in\mathscr{F},\quad \sum_{i=1}^n\delta_{x_i},\quad \sum_{i=1}^n p_i\delta_{x_i}.$$

- 例4(长度). $\mathscr{E}=\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}=\{(a,b]:a,b\in\mathbb{R}\}$, $a\leqslant b$,

$$\mu((a,b])=b-a.$$

命题 (命题2.1.2)

$X=\mathbb{R}$, $\mathscr{E}=\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}$, $F:\mathbb{R}\longleftarrow$ 非降、右连续. 则, μ 是$\mathscr{E}$ 上的测度.

$$\mu((a,b])=F(b)-F(a),\ a<b;\quad \mu((a,b])=0,\ a\geqslant b.$$

- $\mu(\varnothing)=0$, ✓. 下面,

$$\text{假设}\ \sum_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i]=(a,b],\ \text{往证}\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i,b_i])=\mu((a,b]).$$

- "$\leqslant$" : $\forall n$, $\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\subseteq(a,b]$; 不妨设$b_1<\cdots<b_n$. 则

$$a\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<\cdots<a_n<b_n\leqslant a_{n+1}:=b.$$

- 于是,

$$\sum_{i=1}^{n}(F(b_i)-F(a_i))\leqslant F(b)-F(a).$$

- “$\geqslant$”：先用归纳法验证

$$\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\supseteq(a,b]\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\mu((a_i,b_i])\geqslant\mu((a,b]).$$

- $n=1$, ✓. $\quad n\to n+1$: 假设$\bigcup_{i=1}^{n+1}(a_i,b_i]\supseteq(a,b]$.

  不妨设$b_{n+1}=\max_i b_i$. 于是, $b_{n+1}\geqslant b$.

- 若$a_{n+1}\leqslant a$, 则$(a_{n+1},b_{n+1}]\supseteq(a,b]$, ✓.
- 否则, $(a,a_{n+1}]\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$. 由归纳假设,

$$F(a_{n+1})-F(a)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu\left((a_i,b_i]\right).$$

- 从而,

$$F(b)-F(a)\leqslant F(b_{n+1})-F(a_{n+1})+F(a_{n+1})-F(a)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n+1}\mu\left((a_i,b_i]\right).$$

- $\forall \varepsilon > 0$, 取$\delta_i > 0$ 使得

$$\tilde{b}_i := b_i + \delta_i \text{ 满足 } F(\tilde{b}_i) - F(b_i) \leqslant \varepsilon/2^i.$$

- $\forall \delta > 0$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, \tilde{b}_i) \supseteq [a+\delta, b]$, 因此存在有限开覆盖.
- 于是, $\exists n$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, \tilde{b}_i] \supseteq (a+\delta, b].$$

- 于是,

$$F(b)-F(a+\delta) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(F(\tilde{b}_i) - F(a_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(F(b_i) - F(a_i))+\varepsilon.$$

- 令$\varepsilon, \delta \to 0$ 即可.

- 测度空间: $(X, \mathscr{F}, \mu)$.

  X: 非空集合;　$\mathscr{F}$: X 上的σ 代数;　μ: $\mathscr{F}$ 上的测度.

- 零测集: $N \in \mathscr{F}$, $\mu(N) = 0$.
- 概率(测度)空间$(X, \mathscr{F}, P)$: $P(X) = 1$.

  概率(测度): P;　事件: $A \in \mathscr{F}$;　A (发生)的概率: $P(A)$.

- 例5(离散型测度、分布列). X 可列,

$$p : X \to [0, \infty], \quad \mu(A) := \sum_{x \in A} p_x, \ \forall A \in \mathscr{T}_X.$$

- 单调性: $A, B \in \mathscr{E}$, 且$A \subseteq B$, 则$\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
- 半可列可加性/次可列可加性/半σ 可加性:

  $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{E}$,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- 下连续性: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $A_n \uparrow A \in \mathscr{E}$, 则

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

- 上连续性: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $A_n \downarrow A \in \mathscr{E}$, 且$\mu(A_1) < \infty$,则

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

- 在$\varnothing$处连续: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $A_n \downarrow \varnothing \in \mathscr{E}$, 且$\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

定理 (定理2.1.5)

半环上的测度有单调性, 可减性, 半可列可加性, 上、下连续性.

- 假设μ 为半环$\mathscr{Q}$ 上的集函数.
- 命题2.1.3. 若μ 非负、有限可加, 则有$\star$, $\star$.
- 命题2.1.4. 若μ 非负、可列可加, 则有$\star$, $\star$.
- 命题2.1.3的证明:

$$A \subseteq B \Rightarrow B = A + \sum_{i=1}^{n} C_i \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i).$$

- 命题2.1.4的证明: $\varnothing = \sum_{i=1}^{\infty} \varnothing \Rightarrow \mu(\varnothing) = 0$ 或∞.
- 若$\mu(\varnothing) = \infty$, 则$A = A + \sum_{i=1}^{\infty} \varnothing$, 故$\mu(A) = \infty$ ✓.
- 下设$\mu(\varnothing) = 0$. 于是, μ 是测度. (从而, 有限可加.)

- μ 为测度, 往证μ 有半可列可加性:

$$\text{假设} A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{Q} \quad \text{且} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{Q}.$$

- $B_n := A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in r(\mathscr{Q})$, 故

$$B_n = \sum_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad C_{n,k} \in \mathscr{Q}.$$

- $A_n \backslash B_n \in r(\mathscr{Q})$, 故$= \sum_{\ell=1}^{\ell_n} D_{n,\ell}$, 因此,

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} C_{n,k} + \sum_{\ell=1}^{\ell_n} D_{n,\ell}, \quad D_{n,\ell} \in \mathscr{Q}.$$

- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mu(C_{n,k})$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{k_n} \mu(C_{n,k}) + \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \mu(D_{n,\ell})\right)$.

- μ 为测度, 往证μ 有下连续性和上连续性.
- 下连续性: 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{Q}$, $A_n \uparrow A \in \mathscr{Q}$, 则

$$B_n := A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \sum_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad C_{n,k} \in \mathscr{Q}.$$

$$\Rightarrow A_N = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} C_{n,k}.$$

- 上连续性: 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{Q}$, $\mu(A_1) < \infty$, $A_n \downarrow A \in \mathscr{Q}$, 则

$$B_n := A_{n-1} \backslash A_n = \sum_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad C_{n,k} \in \mathscr{Q}.$$

$$\Rightarrow A_N = A + \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mu(C_{n,k}) \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

定理 (定理2.1.6)

μ 是环上的有限可加非负集函数. 则:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5).$$

(1) μ 可列可加;

(2) μ 半可列可加;

(3) μ 下连续;

(4) μ 上连续;

(5) μ 在$\varnothing$ 处连续.

§2.2 外测度

- 定义2.2.1. $\tau : \mathscr{T} \to [0,\infty]$, 满足

  (1) $\tau(\varnothing) = 0$;

  (2) 若$A \subseteq B \subseteq X$, 则$\tau(A) \leqslant \tau(B)$;

  (3) $\forall A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{T}$, 有

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n).$$

  则称τ 为X 上的外测度.

- τ 为非负集函数、半可列可加、半有限可加.

定理 (定理2.2.1)

设μ 是集合系$\mathscr{E}$ 上的非负集函数, $\varnothing \in \mathscr{E}$ 且$\mu(\varnothing) = 0$. 令

$$\tau(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \mathscr{E}, n \geqslant 1; \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A\right\}, \quad \forall A \in \mathscr{T}.$$

则τ是一个外测度, 称为由μ 生成的外测度.

- 注: $\inf \varnothing := \infty$.
- (1) $\tau(\varnothing) = 0$: 取$A = B_n = \varnothing$ 便知;
- (2) 若$A \subseteq B$, 则$\tau(A) \leqslant \tau(B)$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq B \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A;$$

- (3) $\forall A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{T}$, 往证$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$.
- 下设$\tau(A_n) < \infty$, $\forall n$. 否则. ✓.
- 取$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k} \supseteq A_n$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) < \tau(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

- 于是,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow \quad \tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n) + \varepsilon.$$

- 设τ 为外测度. 若A 满足如下Caratheodory 条件:

$$\tau(D) = \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c), \quad \forall D \in \mathscr{T},$$

则称A 称为τ 可测集.

- $\mathscr{F}_\tau$ = 所有τ 可测集.
- 定义2.2.2. 假设$(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间. 若

$$A \in \mathscr{F}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow B \in \mathscr{F}, \forall B \subseteq A,$$

则称$(X, \mathscr{F}, \mu)$ 完备/完全.

定理 (定理2.2.2, Caratheodory定理)

若τ 是外测度，则$\mathscr{F}_\tau$ 是σ 代数，且$(X,\mathscr{F}_\tau,\tau)$ 是完备的测度空间.

往证$\mathscr{F}_\tau$ 是代数:

- (1) $\varnothing\in\mathscr{F}_\tau$, 且补运算封闭:

$$\tau(D)=\tau(D\cap A)+\tau(D\cap A^c),\ \forall D\subseteq X.$$

- (2) 交运算封闭:

$$\begin{aligned}\tau(D)=&\tau(D\cap A_1)+\tau(D\cap A_1^c)\\=&\tau(D\cap A_1\cap A_2)+\tau(D\cap A_1\cap A_2^c)+\tau(D\cap A_1^c).\end{aligned}$$

- 由$D\cap(A_2^c\cap A_1)+D\cap A_1^c=D\cap(A_1^c\cup A_2^c)=D\cap(A_1\cap A_2)^c$,

$$\tau(D)=\tau(D\cap(A_1\cap A_2))+\tau(D\cap(A_1\cap A_2)^c).$$

往证$\mathscr{F}_\tau$ 是σ 代数:

- (5) 假设$\{A_n \in \mathscr{F}_\tau, n = 1, 2, \cdots\}$, 则

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathscr{F}_\tau, \quad \text{两两不交, 且} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n.$$

- (3) ~ (4). 只需验证:

$$\text{若 } \{B_i \in \mathscr{F}_\tau, i = 1, 2, \cdots\} \text{ 两两不交, 则 } \sum_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{F}_\tau.$$

- 只需验证

$$\tau(D) \geqslant \tau\left(D \bigcap \star\right) + \tau\left(D \bigcap \star^c\right).$$

往证$\mathscr{F}_\tau$ 是σ 代数(续):

- $\forall D \in \mathscr{T}$,

$$\tau(D) = \tau\left(D \bigcap \sum_{i=1}^{n} B_i\right) + \tau\left(D \cap \star^c\right) =: I_1 + I_2.$$

- $I_2 \geqslant \tau\left(D \bigcap (\sum_{i=1}^{\infty} B_i)^c\right)$.
- (3) I_1:

$$I_1 = \tau(D \cap B_1) + \tau\left(D \bigcap \sum_{i=2}^{n} B_i\right) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} \tau(D \cap B_i).$$

- (4) 故,

$$\tau(D) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \cap B_i) + \tau\left(D \bigcap (\sum_{i=1}^{\infty} B_i)^c\right).$$

往证$\mathscr{F}_\tau$ 是σ 代数(续):

- 一方面,

$$\tau(D) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \cap B_i) + \tau\left(D \bigcap (\sum_{i=1}^{\infty} B_i)^c\right)$$
$$\geqslant \tau\left(D \cap \star\right) + \tau\left(D \cap \star^c\right).$$

- 另一方面,

$$\tau(D) \leqslant \tau\left(D \cap \star\right) + \tau\left(D \cap \star^c\right).$$

- 故, $\star \in \mathscr{F}_\tau$, 且

$$\tau\left(D \bigcap \star\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \cap B_i) \quad \forall D \in \mathscr{T}_X.$$

往证$\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 是测度:

- (6) 假设$\{B_n \in \mathscr{F}_\tau, n = 1, 2, \cdots\}$, 两两不交.
- 取$D = \sum_{n=1}^\infty B_n$, 则一方面

$$\tau(D) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau\left(D \cap B_i\right) + \tau\left(D \bigcap \left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau\left(B_i\right).$$

- 另一方面,

$$\tau(D) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau\left(B_i\right).$$

往证$(X, \mathscr{F}_\tau, \tau)$ 完备:

- (7) $\tau(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathscr{F}_\tau$:

$$\begin{aligned}\tau(D) &\geqslant \tau(D \cap A^c) = \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c);\\ \tau(D) &\leqslant \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c).\end{aligned}$$

- $A \subseteq B \in \mathscr{F}_\tau$, $\tau(B) = 0$, 则

$$\tau(A) \leqslant \tau(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathscr{F}_\tau.$$

§2.3 测度的扩张

- 设μ, ν 分别是$\mathscr{E}$, $\overline{\mathscr{E}}$ 上的测度, 且$\mathscr{E} \subseteq \overline{\mathscr{E}}$. 若

  $$\nu(A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{E},$$

  则称ν 是μ 在$\overline{\mathscr{E}}$ 上的扩张.
- 扩张是惟一的: 若ν' 也是μ 在$\overline{\mathscr{E}}$ 上的扩张, 则$\nu' = \nu$.

例1. $X=\{a,b,c\}$, $\mathscr{E}=\{\varnothing,\{a,b\},\{b,c\},X\}$,

$$\mu(\varnothing)=0;\quad \mu(\{a,b\})=1;\quad \mu(\{b,c\})=1;\quad \mu(X)=2.$$

- μ 是$\mathscr{E}$ 上的测度, 且外测度

$$\tau(\varnothing)=0;\quad \tau(X)=\tau(\{a,c\})=2;$$

$$\tau(\{a\})=\tau(\{b\})=\tau(\{c\})=\tau(\{a,b\})=\tau(\{b,c\})=1.$$

- $\mathscr{F}_\tau=\{\varnothing,X\}$. $\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 不是扩张.

例2. $X=\mathbb{Q}$.

- π 系与半环:

$$\mathscr{P}=\{X\cap(-\infty,a]:a\in\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing\},$$
$$\mathscr{Q}=\{X\cap(a,b]:-\infty<a\leqslant b<\infty\}.$$

- 令

$$\mu(\varnothing)=0,\quad \mu(A)=\infty,\ \forall A\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}\backslash\{\varnothing\},$$
$$\lambda_\alpha(A)=\alpha|A|,\quad \forall A\in\sigma(\mathscr{Q}).\quad (\alpha>0.)$$

- μ 不是σ 有限的;　$\forall\alpha>0$, λ_α 都是μ 的扩张.

命题 (命题2.3.1, 扩张的唯一性)

设$\mathscr{P}$ 是π系. 若$\sigma(\mathscr{P})$ 上的测度μ,ν 满足以下两条, 则$\mu=\nu$.

(1) $\mu|_{\mathscr{P}}=\nu|_{\mathscr{P}}$; (2) $\mu|_{\mathscr{P}}$ 是σ 有限的.

- 注: π 系上σ 有限的测度, 若可扩张到$\sigma(\mathscr{P})$, 则扩张惟一.
- 取$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{P}$ 使得$X=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 且$\mu(A_n)<\infty$, $\forall n$.
- $\forall n$, $B(:=A_n)\in\mathscr{P}$ 满足$\mu(B)<\infty$. 往证

$$\mu(A\cap B)=\nu(A\cap B),\quad \forall A\in\sigma(\mathscr{P}).$$

- 于是$\forall A\in\sigma(\mathscr{P})$,

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A\cap A_n)=\nu(A).$$

- 设$B \in \mathscr{P}$ 满足$\mu(B) < \infty$. 验证

$$\mathscr{L} := \{A \in \sigma(\mathscr{P}) : \mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)\}$$

是λ 系, 且$\mathscr{L} \supseteq \mathscr{P}$, 故$\mathscr{L} \supseteq \sigma(\mathscr{P})$.

- $X \in \mathscr{L}$, ✓. 设$A_1, A_2 \in \mathscr{L}$, 且$A_1 \supseteq A_2$. 由$\mu(B) < \infty$,

$$\begin{aligned}\mu\big((A_1 - A_2)B\big) =&\mu(A_1 B) - \mu(A_2 B)\\ =&\nu(A_1 B) - \nu(A_2 B) = \nu\big((A_1 - A_2)B\big).\end{aligned}$$

- 设$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{L}$ 且$A_n \uparrow A$. 则

$$\mu(AB) =\uparrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n B) =\uparrow \lim_{n\to\infty} \nu(A_n B) = \nu(AB).$$

定理 (定理2.3.2, 测度扩张定理)

假设μ 是半环$\mathscr{Q}$ 上的测度, τ 为μ 生成的外测度. 则

$$\sigma(\mathscr{Q}) \subseteq \mathscr{F}_\tau, \quad \tau|_{\mathscr{Q}} = \mu.$$

- 注1. 半环$\mathscr{Q}$ 上的测度可扩张到$\sigma(\mathscr{Q})$ 上.
- 注2. (推论2.3.3).

  若μ 是σ 有限的, 则μ 可惟一地扩张到$\sigma(\mathscr{Q})$.

  该存在惟一的扩张即为 $\tau|_{\sigma(\mathscr{Q})}$.

- 往证:

$$\tau|_{\mathscr{Q}} = \mu, \quad \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{F}_\tau.$$

- (1) $\tau|_{\mathscr{Q}} = \mu$: 假设$A \in \mathscr{Q}$.

  一方面, 取$B_1 = A$, $B_n = \varnothing$, $n \geqslant 2$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A, \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(A).$$

- 另一方面, 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{Q}$ 使得$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A$, 则

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(AA_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(AA_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

- 故, $\tau(A) = \mu(A)$.

- (3) $\forall A \in \mathscr{Q}$, 往证$A \in \mathscr{F}_\tau$. 只需验证:

$$\tau(D) \geqslant \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c), \quad \forall D \in \mathscr{T}.$$

- 若$\tau(D) = \infty$, 则✓. 下设$\tau(D) < \infty$.
- 取$B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{Q}$ 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq D \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \tau(D) + \varepsilon.$$

- $\forall n$, 记$\hat{D} := B_n$. 往证

$$\mu(\hat{D}) \big(= \tau(\hat{D}) \big) \geqslant \tau(\hat{D} \cap A) + \tau(\hat{D} \cap A^c), \quad \forall \hat{D} \in \mathscr{Q}.$$

- (2) $\forall \hat{D} \in \mathscr{Q}$, $\hat{D} \cap A^c = \hat{D} \backslash A = \sum_{i=1}^{n} C_i$, 于是

$$\mu(\hat{D}) = \mu(\hat{D} \cap A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$$
$$\geqslant \tau(\hat{D} \cap A) + \tau(\hat{D} \cap A^c).$$

- 代入(3). $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq D \in \mathscr{T}$, $\tau(D) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. 于是

$$\tau(D) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \tau(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(B_n \cap A^c)$$
$$\geqslant \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c).$$

- (4) $\tau|_{\sigma(\mathscr{Q})}$ 是测度: $\sigma(\mathscr{Q}) \subseteq \mathscr{F}_\tau$.

定理 (定理2.3.4)

设τ 是半环$\mathscr{Q}$ 上的测度μ 生成的外测度.

(1) $\forall A \in \mathscr{F}_\tau$, $\exists B \in \sigma(\mathscr{Q})$ 使得$B \supseteq A$ 且$\tau(A) = \tau(B)$;

(2) 若进一步μ 是σ 有限的, 则进一步$\tau(B \backslash A) = 0$.

- (1) 若$\tau(A) = \infty$, 则取$B = X$. 下设$\tau(A) < \infty$.
- 取$B_{n,1}, B_{n,2}, \cdots \in \mathscr{Q}$ 使得

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k} \supseteq A \quad 且 \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) < \tau(A) + \frac{1}{n}.$$

- $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A$, 故$\tau(B) \geqslant \tau(A)$.
- 另一方面, $B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k} \supseteq B$, 故

$$\tau(B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) < \tau(A) + \frac{1}{n} \to \tau(A).$$

- (2) 进一步, $X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathscr{Q}$ 且$\mu(A_n) < \infty$.
- $A = \sum_{n=1}^{\infty} AA_n$,

$$AA_n \in \mathscr{F}_\tau \quad \text{且} \quad \tau(AA_n) \leqslant \tau(A_n) = \mu(A_n) < \infty.$$

- 取$B_n \in \sigma(\mathscr{Q})$ 使$B_n \supseteq AA_n$ 且$\tau(B_n) = \tau(AA_n)$.
- $B = AA_n + B\backslash(AA_n)$, 故

$$\tau(B_n) = \tau(AA_n) + \tau(B_n - AA_n)$$
$$\Rightarrow \tau(B_n - AA_n) = \tau(B_n) - \tau(AA_n) = 0.$$

- $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq \sum_{n=1}^{\infty} AA_n = A$, 且

$$\tau(B - A) = \tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n - AA_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(B_n - AA_n) = 0.$$

命题 (命题2.3.5, 测度的逼近)

设μ 是代数$\mathscr{A}$ 上的测度, τ 为μ 生成的外测度. 若$A \in \sigma(\mathscr{A})$ 且$\tau(A) < \infty$, 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathscr{A}$ 使得$\tau(A \Delta B) < \varepsilon$.

- 取$B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{A}$ 使得

$$\hat{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \tau(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

- 取N 充分大, $B := \bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathscr{A}$,

$$\tau(A \backslash B) \leqslant \tau\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right) \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- $\tau(B \backslash A) \leqslant \tau\left(\hat{B} - A\right) = \tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) - \tau(A) < \frac{\varepsilon}{2}$.
- $\tau(A \Delta B) = \tau(A \backslash B) + \tau(B \backslash A) < \varepsilon$.

定理 (定理2.3.6)

设$\mathscr{A}$ 是代数, μ 是$\sigma(\mathscr{A})$ 上的测度, 在$\mathscr{A}$ 上σ 有限. 若$A \in \sigma(\mathscr{A})$ 且$\mu(A) < \infty$, 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathscr{A}$ 使得$\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.

- 由σ 有限知$\mu = \tau|_{\sigma(\mathscr{A})}$.

§2.4 测度空间的完全化

- $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间. 令

$$\widetilde{\mathscr{F}} := \{A \cup N : A \in \mathscr{F}, \exists B \in \mathscr{F} \text{ 使得 } \mu(B) = 0 \text{ 且 } N \subset B\}.$$

- 令

$$\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A), \quad \forall A \cup N \in \widetilde{\mathscr{F}}.$$

- 定理2.4.1. $\widetilde{\mathscr{F}}$ 是σ 域. $\tilde{\mu}$ 良定. $(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mu})$ 是完备的测度空间.
- 注: $\tilde{\mu}(A) = \mu(A), \forall A \in \mathscr{F}$. 故$\tilde{\mu}$ 为μ 的扩张.
- 称$(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mu})$ 为$(X, \mathscr{F}, \mu)$ 的完备化/完全化.

定理 (定理2.4.1)

$\widetilde{\mathscr{F}}$ 是σ 代数. $\tilde{\mu}$ 良定. $(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mu})$ 是完备的测度空间.

- $\widetilde{\mathscr{F}} := \{A \cup N\}$, $N \subseteq B$, $\mu(B) = 0$; $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$.
- (1) $\widetilde{\mathscr{F}}$ 是σ 代数: $X = X \cup \varnothing \in \widetilde{\mathscr{F}}$;
- $(A \cup N)^c = A^c - A^c N = (A^c \backslash B) + A^c(B - N) \in \widetilde{\mathscr{F}}$;
- $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = A \cup N$,

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n =: B, \quad \mu(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0.$$

- (2) $\tilde{\mu}$ 良定. 若$A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, 则$A_1 \cup B_1 \supseteq A_2$, 故

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cup B_1) \geqslant \mu(A_2), \quad \text{同理}, \ \mu(A_2) \geqslant \mu(A_1).$$

- (3) $\tilde{\mu}$ 是$\widetilde{\mathscr{F}}$ 上的测度:

$\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$, $\tilde{\mu}(A \cup N) \geqslant 0$, 且

$$\tilde{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cup N_n)\right) = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cup N_n).$$

- (4) $(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mu})$ 完备:

若$C \subseteq A \cup N$, $\mu(A) = \tilde{\mu}(A \cup N) = 0$, 则

$$C \subseteq A \cup B, \quad \mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

故$C = \varnothing \cup C \in \widetilde{\mathscr{F}}$.

定理 (定理2.4.2)

设τ 是半环$\mathscr{Q}$ 上的σ 有限测度μ 生成的外测度, 则$(X, \mathscr{F}_\tau, \tau)$ 是$(X, \sigma(\mathscr{Q}), \tau)$ 的完备化.

- $\mathscr{F} := \sigma(\mathscr{Q})$, 往证$\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_\tau$.
- $\widetilde{\mathscr{F}} := \{A \cup N\} \subseteq \mathscr{F}_\tau$: $(X, \mathscr{F}_\tau, \tau)$ 完备.
- $\widetilde{\mathscr{F}} \supseteq \mathscr{F}_\tau$: $\forall C \in \mathscr{F}_\tau$, 往证: $C = A + N$.
- $C^c \in \mathscr{F}_\tau$, 故$\exists B \in \mathscr{F}$ 使得

$$B \supseteq C^c \text{ 且 } \tau(B - C^c) = 0.$$

- 记$A = B^c$, $N = B - C^c$ 则$C = A + N$.

例. L-S测度与分布

- $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 非降、右连续, 则称为准分布函数.
- ν 为半环$\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}$ 上的测度, σ 有限.

$$\nu=\nu_F:(a,b]\mapsto(F(b)-F(a))\vee 0.$$

- 记ν 生成外测度为$\tau=\lambda_F$.
- 称$\mathscr{F}_\tau$ 中的集合为Lebesgue-Stieljes (L-S) 可测集;
  $f:(\mathbb{R},\mathscr{F}_\tau)\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 为L-S 可测函数; $\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 为L-S 测度.
- 特别地, $F=\mathrm{id}$ 时, L 可测集; L 测度, λ; L 可测函数.
- $(\mathbb{R},\mathscr{F}_\tau,\tau)$ 为测度空间, 完备、σ 有限.

- $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathscr{Q}_{\mathbb{R}})$, 故$(\mathbb{R}, \mathscr{F}_\tau, \tau)$ 是$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \tau)$ 的完备化.
- $\mu = \mu_F = \lambda_F|_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}}}$ 为ν 到$\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathscr{Q}_{\mathbb{R}})$ 上的惟一的扩张.
- 反过来, 假设μ 为$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上的测度.
- 若$\mu\big((a,b]\big) < \infty$, $\forall a < b$, 则$\mu = \mu_F$. (习题二、15)

$$F = F_\mu : x \mapsto \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{或 } F = F_\mu : 0 \mapsto 0; \quad x \mapsto \begin{cases} \mu((0,x]), & x > 0; \\ -\mu((x,0]), & x < 0. \end{cases}$$

- 并且$\widetilde{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}}^{\mu} = \mathscr{F}_{\lambda_F}$:

$$\mathscr{F}_{\lambda_F} = \{A \cup N : A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \exists B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \text{使} \mu(B) = 0, N \subseteq B\}.$$

- 称$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上的概率为分布.
- 设$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为准分布函数(非降、右连续). 又若F 规范:

$$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1,$$

则称F 为分布函数(d.f.). (P51 $\sim$ 52.)

- 分布与d.f.一一对应:

若μ 为分布, 则F_μ 为d.f.. 若F 为分布函数, 则μ_F 为分布;

$$\mu = \nu \Rightarrow F_\mu = F_\nu, \quad F = G \Rightarrow \mu_F = \mu_G.$$

定理 (定理3.2.10 (1))

设$g : (X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{S})$, μ 为$\mathscr{F}$ 上的测度. 令

$$\nu(B) := \mu(g^{-1}B) = \mu \circ g^{-1}(B), \quad \forall B \in \mathscr{S}.$$

则ν 是$\mathscr{S}$ 上的测度.

- 证: ν 非负; 且

$$g^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{-1}B_n$$

$$\Rightarrow \nu\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(g^{-1}B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n).$$

- 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, $f:(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. 称

$$P\circ f^{-1}:B\mapsto P(f\in B),\quad \forall B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$$

为f 的(概率)分布, 记为μ_f.

- 若$\mu_f=\mu$, 则称f 服从分布μ, 记为$f\sim\mu$.
- 称$F_f:=F_{\mu_f}$ 为f 的分布函数.

$$F_f(x):=\mu_f((-\infty,x])=P(f\leqslant x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

- 若$F_f=F$, 则也称f 服从F, 记为$f\sim F$.
- 若$F_f=F_g$ (iff $\mu_f=\mu_g$), 则称f 与g 同分布, 记为

$$f\overset{d}{=}g.$$

构造随机变量/随机向量f 使得$f \sim F$.

- 方法一、取$U \sim U(0,1)$: 取

$$\Omega = (0,1), \quad \mathscr{F} = \mathscr{B}_{(0,1)}, \quad P = \lambda|_{\mathscr{F}}, \quad U = \mathrm{id}.$$

- 设F 是分布函数. 左连续逆:

$$F^{\leftarrow} : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant t\}.$$

- 引理2.5.5. $F^{\leftarrow}$ 实值、非降、左连续, 且

$$F^{\leftarrow}(t) \leqslant x \Leftrightarrow F(x) \geqslant t.$$

- 任何d.f. 都是某r.v. 的d.f.. $f := F^{\leftarrow}(U) \sim F$:

$$P(F^{\leftarrow}(U) \leqslant x) = P(F(x) \geqslant U) = F(x).$$

- 方法二、取$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $P = \mu_F$. $f = \mathrm{id}$.

§2.5 可测函数的收敛性

- $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间.
- 子集 A = 关于元素x 的命题/性质.
- 若∃ 零测集N 使得命题对所有的$x \in N^c$ 成立,
  则说该命题几乎处处(a.e.)成立.　注: μ-a.e..
- $f, f_1, f_2, \cdots$ 是测度空间$(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数.
- f 几乎处处有限; 几乎处处有界; 几乎处处为0; $\cdots\cdots$.
- 定义2.5.1. 若

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} f_n \neq f\right) = 0,$$

  则说$\{f_n\}$ 几乎处处以f 为极限.
  又若f a.e.有限, 则说$\{f_n\}$ 几乎处处收敛到f, 记为$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.
- 注: $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 中默认f a.e. 有限.

- 定义2.5.2. 若$\forall \delta > 0$, $\exists A \in \mathscr{F}$ 使得$\mu(A) < \delta$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\notin A} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

则说$\{f_n\}$ 几乎一致收敛到f. 记为$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$.

- 注: 在A^c 上一致收敛.
- 注: 不是几乎必然一致收敛.

命题 (命题2.5.1)

$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 当且仅当$\forall \varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0.$$

- 注: 若$f(x) - g(x)$ 无法定义, 则规定$x \in \{|f - g| \geqslant \varepsilon\}$.
- $A_\varepsilon := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}$.

$$\left\{\lim_{n\to\infty} f_n \neq f\right\} \cup \{|f| = \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\frac{1}{k}} =\uparrow \lim_{k\to\infty} A_{\frac{1}{k}}.$$

命题 (命题2.5.2)

$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 当且仅当$\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0.$$

- $\Rightarrow$: $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 指
  $\forall \delta > 0, \exists A \in \mathscr{F}$ 使得$\mu(A) < \delta$ 且$f_n(x) \overset{x\in A^c}{\rightrightarrows} f(x)$.
- $f_n(x) \overset{x\in A^c}{\rightrightarrows} f(x)$ 指: 固定$\varepsilon > 0$. $\exists m$ 使得当$n \geqslant m$ 时, $x \notin A \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- 当$n \geqslant m$ 时, $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon \Rightarrow x \in A$. 即, $\star \subseteq A$.
- 令$\delta \to 0$ 知$\downarrow \lim_{m\to\infty} \mu(\star) = 0$.
- $\Leftarrow$: $\forall \delta > 0, \exists m_k$ 使得$\mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} \{|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\}\right) < \frac{\delta}{2^k}$.
- $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 则$\mu(A) < \delta$, 且$f_n(x) \overset{x\in A^c}{\rightrightarrows} f(x)$.

- 定义2.5.3. 若$\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

则称$\{f_n\}$ 依测度收敛到f. 记为$f_n \xrightarrow{\mu} f$.

- 命题2.5.1. $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ iff $\forall\varepsilon > 0$, $\mu\left(\downarrow \lim\limits_{m\to\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = 0$.
- 命题2.5.2. $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ iff $\forall\varepsilon > 0$, $\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \searrow 0$.
- 定理2.5.3.

$$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \text{ 和 } f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

若$\mu(X) < \infty$, 则

$$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

定理 (定理2.5.4)

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 当且仅当$\{f_n\}$ 的任一子列存在其子列 $\{f_{n'}\}$ 使得

$$f_{n'} \xrightarrow{\text{a.u.}} f.$$

- $\Rightarrow$: 往证若$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在$\{f_n\}$ 的 子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得$f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.u.}} f$.
- $n_0 = 0$. 递归地取$n_k > n_{k-1}$ 使得
$$\mu(|f_n - f| \geqslant \tfrac{1}{k}) \leqslant \tfrac{1}{2^k}, \quad \forall n \geqslant n_k.$$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \frac{1}{m} < \varepsilon$, $\{|f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{k}\}$,
$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \star_k\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \star_k\right) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$
- $\Leftarrow$: 反证法. 否则$\exists \varepsilon > 0$ 使得$\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) \nrightarrow 0$.
- $\exists \delta > 0$ 及子列$\{n_k\}$ 使得$\mu(|f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon) > \delta$.
- 不存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子列$\{f_{n'}\}$ 使得$f_{n'} \xrightarrow{\text{a.u.}} f$.

- 例1. $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, $f_n(x) = \mathbf{I}_{\{|x|>n\}}$. 则

$$f(x) \to 0, \forall x \Rightarrow f_n \stackrel{\text{a.e.}}{\to} 0 =: f.$$

- 取$\varepsilon = 1$, $\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = \infty$, $\forall n$. 故$f_n \stackrel{\mu}{\to} 0$ 不成立.
- 故$f_n \stackrel{\text{a.u.}}{\to} 0$ 不成立.
- 例2. $((0,1], \mathscr{B}_{(0,1]}, \lambda)$. $f_{k,i} = \mathbf{I}_{\{\frac{i-1}{k}<x\leqslant\frac{i}{k}\}}$, $i = 1, \cdots, k$.
- $n \leftrightarrow (k,i)$: $(f_1, f_2, \cdots) = (f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \cdots)$.
- $n \to \infty$ iff $k \to \infty$.

$$\lambda(|f_n - f| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{k} \to 0, \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow f_n \stackrel{\mu}{\to} f.$$

- $\forall x$, $f_n(x) \nrightarrow f(x)$. 故$f_n \stackrel{\text{a.e.}}{\to} 0$ 不成立. 从而, $f_n \stackrel{\text{a.u.}}{\to} 0$ 不成立.

概率空间

- 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间(p.s.),
  $f, f_1, f_2, \cdots$ 是随机变量(r.v.).
- 几乎处处改成为几乎必然.
- 例, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 改称为几乎必然收敛, 记为$f_n \xrightarrow{\text{a.s.}} f$.
- $f_n \xrightarrow{P} f$ 改称为依概率收敛.

- 设F 是实值函数. 记

$$C(F) := \{x : F \text{ 在 } x \text{ 连续}\}.$$

- 设$F, F_1, F_2, \cdots$ 是非降的实值函数. 若

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F),$$

则称$\{F_n\}$ 弱收敛到F, 记为$F_n \xrightarrow{w} F$.

- 设$F, F_1, F_2, \cdots$ 是分布函数, $f_n \sim F_n$, $n = 1, 2, \cdots$
- 定义2.5.4. 若$F_n \xrightarrow{w} F$, 则称$\{f_n\}$ 依分布收敛到F, 记为$f_n \xrightarrow{d} F$.

  又若$f \sim F$, 则称$\{f_n\}$ 依分布收敛到f, 记为$f_n \xrightarrow{d} f$.

定理 (定理2.5.6)

$f_n \xrightarrow{P} f \ \Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f.$

- $$P(h \leqslant y) \leqslant P(h \leqslant y, |h-g| < \varepsilon) + P(h \leqslant y, |h-g| \geqslant \varepsilon)$$
  $$\leqslant P(g \leqslant y+\varepsilon) + P(|h-g| \geqslant \varepsilon).$$
- $F(x) = P(f \leqslant x)$, $F_n(x) = P(f_n \leqslant x)$.
- 取$h = f_n$, $g = f$, $y = x$.
  $$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0.$$
  故, $\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x)$.
- 取$h = f$, $g = f_n$, $y = x - \varepsilon$.
  $$F(x-\varepsilon) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x), \forall \varepsilon > 0.$$
- $\forall x \in C(F)$, $F(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_n(x)$. 从而$F_n(x) \to F(x)$.

定理 (定理2.5.8, Skorokhod 定理)

若$f_n \xrightarrow{d} f$, 则存在概率空间$(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{P})$ 与其上$r.v.$ $\{\widetilde{f}_n\}$ 和$\widetilde{f}$ 使得

$$\widetilde{f}_n \stackrel{d}{=} f_n,\ n = 1, 2, \cdots \quad \widetilde{f} \stackrel{d}{=} f, \quad \widetilde{f}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \widetilde{f}.$$

- 已证: $U \sim U(0,1) \Rightarrow F^{\leftarrow}(U) \sim F$.
- 引理2.5.7. 若$F_n \xrightarrow{w} F$, 则$F_n^{\leftarrow} \xrightarrow{w} F^{\leftarrow}$.
- $\mathbb{R} \backslash C(F^{\leftarrow})$ 可数. 故$F_n^{\leftarrow}(U) \xrightarrow{\text{a.s.}} F^{\leftarrow}(U)$.
- 取$F_n := F_{f_n}$, $F := F_f$ 即可.

- 可测函数: f a.e. 定义. 可延拓为$\tilde{f}$:

$$\tilde{f} := f \cdot \mathbf{I}_{N^c}, \quad 其中\ \mu(N) = 0.$$

- 若只涉及可数个函数, 则$f = g$ 指$f \stackrel{\text{a.s.}}{=} g$.
- $f_n \xrightarrow{\text{a.s.}} f$, $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
- r.v. 指a.s. 定义且有限.