

§2.2 离散型随机变量

- 定义2.1. X 是离散型随机变量指: X 取有限个值 x_1, \dots, x_n , 或可列个值 x_1, x_2, \dots . X 的概率分布(列)指:

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, \dots, n \text{ 或 } k = 1, 2, \dots$$

- 概率分布表:

X	x_1	x_2	\cdots	x_k	\cdots
p	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

- 非负: $p_k \geq 0, \forall k$; 规范: $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ 或 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

1. 两点分布(伯努利分布), $X \sim B(1, p)$ (参数 $0 \leq p \leq 1$):

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

• 模型: 投币,

投到 H 则 $X = 1$; 投到 T 则 $X = 0$.

• 示性函数 1_A :

事件 A 发生则取1; A 不发生则取0.

• 例2.1. 100 件产品中有3 件次品. 从中任取一件.

$A =$ “取到合格品”, $X = 1_A$, $p = 0.97$.

• $p = 0$ 或1 时, $X \equiv 0$ 或1, 即, X 退化.

2. 二项分布, $X \sim B(n, p)$ (参数 $n \geq 1, 0 \leq p \leq 1$):

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

● 模型: 独立投币 n 次, 正面的总次数.

● 定理2.1. 分布列的最大值点 k_0 如下:

若 $(n + 1)p \notin \mathbb{Z}$, 则 $k_0 = [(n + 1)p]$;

若 $(n + 1)p \in \mathbb{Z}$, 则 $k_0 = (n + 1)p$ 或 $(n + 1)p - 1$.

3. 泊松分布, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (参数: $\lambda > 0$):

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- 模型: 例2.3. 研究放射性物质在8分钟内放射出的粒子数 X .
- 近似: 以 $\frac{1}{n} * 8$ 分钟为一个微观时间.



- (i) 在一个微观时间内放射粒子的概率为 $p = \frac{\lambda}{n}$,
- (ii) 不同的微观时间内是否放射粒子相互独立.

- X 近似服从 $B(n, p)$, 故

$$\begin{aligned} P(X = k) &\approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^n \\ &\approx \frac{(np)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

- 上式即为§1.7 第一近似公式.
- 定理2.2. 分布列的最大值点 $k_0 \approx \lambda$.

4. 超几何分布, $X \sim H(N, D, n)$ (参数 N, D, n):

$$P(X = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- 模型: N 个产品, D 个次品, 任取 n 个, 抽到的次品数为 X .
- 放回抽样 vs 不放回抽样: 二项分布 vs 超几何分布.
- 定理 2.3. 给定 n . 当 $N \rightarrow \infty$, $\frac{D}{N} \rightarrow p$ 时,

$$\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \geq 0.$$

- 读解定理 2.3: 例 $n = 5$. H 表示次品, T 表示合格品, 则

$$HHTHT: \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N-2} \cdot \frac{M-2}{N-3} \cdot \frac{N-M-1}{N-4} \rightarrow p^3 q^2.$$

5. 几何分布, $X \sim G(p)$, 参数 $0 < p < 1$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

- 模型: 独立重复投币中, 第一次投到 H 时的投币次数.
- $P(X > n) = (1 - p)^n, \forall n \geq 0$.
- 无记忆性: $P(X - n = k | X > n) = P(X = k)$.

- 6. 负二项分布, $X \sim NB(r, p)$, 参数 $r \geq 1, 0 < p < 1$:

$$P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots$$

- 模型: 独立重复投币中, 第 r 次投到 H 时的投币次数.

- 7. 离散均匀分布,

$$P(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \dots, N.$$

- 模型: 古典概型.