§2.6 随机变量的数学期望

期望(expectation)的含义: 均值(mean).

- X 的大量独立观测值(记为$a_1, a_2, \cdots, a_n$) 的算术平均:

$$\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n).$$

- X 的所有可能值的加权平均(总和).

  例, $P(X = x_k) = p_k$, $k = 1, \cdots, m$.

  记$n_k = \{m : 1 \leqslant m \leqslant n, a_m = x_k\}$. 那么, 根据概率的频率含义, $\frac{n_k}{n} \approx p_k$, 于是

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} n_k \approx \sum_{k=1}^{K} x_k p_k.$$

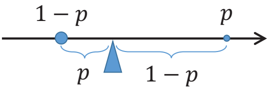
- 定义6.1. 假设X 是离散型, 分布列为

$$P(X=x_k)=p_k, \quad k=1,\cdots,n \text{ 或 } k=1,2,\cdots.$$

如果$\sum_k |x_k|p_k<\infty$, 那么, 称X 的期望存在, 称$\sum_k x_k p_k$ 为X 的数学期望, 记为EX.

- EX 是重心.

例, (1) 伯努利分布, $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$. 则, $EX=p$.



(3) 泊松分布.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=:p_k,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

- $\forall k\geqslant 1$,

$$x_k p_k = k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda p_{k-1}.$$

- 因此,

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda p_{k-1}=\lambda\sum_{\ell=0}^{\infty}p_\ell=\lambda.$$

(2) 二项分布.

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} =: b(n;k),\ \ k=0,1,\cdots,n,(q=1-p).$$

- $\forall 1\leqslant k\leqslant n$,

$$\begin{aligned} k\cdot b(n;k) =&k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\ =&\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p\cdot p^{k-1}q^{n-k}=np\cdot b(n-1,k-1).\end{aligned}$$

- 因此,

$$\begin{aligned} EX=\sum_{k=0}^{n}k\cdot b(n;k)&=\sum_{k=1}^{n}np\cdot b(n-1;k-1)\\ &=np\sum_{\ell=0}^{n-1}b(n-1,\ell)=np.\end{aligned}$$

(7) 超几何分布.

$$P(X=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

- 记$h(N,D,n;k)=A_1\cdot A_2\cdot A_3=$

$$\frac{D!}{k!(D-k)!}\cdot\frac{(N-D)!}{(n-k)!\big(N-D-(n-k)\big)!}\cdot\frac{n!(N-n)!}{N!}.$$

- 记$x'=x-1$. 则, $\forall 1\leqslant k\leqslant n$,

$$k\cdot A_1=\frac{D!}{(k-1)!(D-k)!}=D\times\frac{D'!}{k'!\big(D'-k'\big)!}.$$

- 进一步,

$$A_2=\frac{(N'-D')!}{(n'-k')!\big(N'-D'-(n'-k')\big)!},$$

$$A_3=\frac{n\cdot n'!(N'-n')!}{N\cdot N'!}=\frac{n}{N}\times\frac{n'!(N'-n')!}{N'!}.$$

- 记$x' = x - 1$. 则$\forall 1 \leqslant k \leqslant n$,

$$k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \times h(N', D', n'; k').$$

- 因此,

$$EX = \sum_{k=1}^{n} k \cdot h(N, D, n; k) = \frac{nD}{N} \sum_{k'=0}^{n'} h(N', D', n'; k') = \frac{nD}{N}.$$

- $D = 1$ 时, 退化为伯努利分布, $EX = p = \frac{D}{N}$.
- $D \geqslant 2$ 时, 不放回抽样, 仍有$EX = np$.

(4) 几何分布.

$$P(X=k)=q^{k-1}p=:p_k,\quad k=1,2,\cdots,(q=1-p).$$

- 直接计算:

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k}p_k=\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=\ell}^{\infty}p_k$$
$$=\sum_{\ell=1}^{k}p\cdot\frac{q^{\ell-1}}{1-q}=\sum_{m=0}^{\infty}q^m=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}.$$

- 习题二、18. 若X 取非负整数, 则$EX=\sum_{\ell=1}^{\infty}P(X\geqslant\ell)$.
- 证: $\sum_{k=\ell}^{\infty}p_k=P(X\geqslant\ell)$.

2. 一般随机变量的期望

- X 为任意随机变量. 做如下近似: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{当 } n\varepsilon < X \leqslant (n+1)\varepsilon \text{ 时, 令 } X^* = n\varepsilon.$$

- 直观: $X^* \leqslant X < X^* + \varepsilon$, 因此$EX^* \leqslant EX < EX^* + \varepsilon$.
- 定义6.2. 若EX^* 存在且当$\varepsilon \to 0$ 时有极限, 则称X 的期望存在, 且称该极限为X 的期望, 记为EX.
- 对离散型随机变量, 定义6.1与定义6.2一致.
- 定理6.1. 对连续型随机变量, 若$\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx < \infty$, 则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

(2) 指数分布.

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

- $\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^\infty x de^{-\lambda x} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$
- 一般地，若X 为连续型，且$X \geqslant 0$. 令

$$G(x) = P(X > x) = \int_x^\infty p(y)dy,$$

则$G'(x) = -p(x)$. 于是，

$$\int_0^\infty xp(x)dx = \int_0^\infty xdG(x) = \int_0^\infty G(x)dx.$$

(3) 正态分布.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- $X \sim N(0,1)$:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

- 同理, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则$p(\mu + x) = p(\mu - x)$, 因此$EX = \mu$.
- 例, 柯西分布,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

但是, $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx = \infty$. 因此, EX 不存在!

(4) 伽玛分布.

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

- $\forall x > 0$,

$$xp(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-\beta x} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \hat{p}(x).$$

- 因此,

$$EX = \int_0^\infty xp(x)dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\infty \hat{p}(x)dx = \frac{\alpha}{\beta}.$$

- 定理6.2. (1) 若$X \equiv a$, 则$EX = a$;
- 定理6.2. (2) 若$X \geqslant 0$, 且EX 存在, 则$EX \geqslant 0$;
- 定理6.2. (3)(或, 推论6.1). 若$F_X = F_Y$ (或, 若$X = Y$), 且EX 存在, 则EY 存在, 且$EX = EY$.
- 定理6.3. (1) & (2), 线性: 假设EX, EY 存在. 则,

$$E(aX) = aEX, \quad E(X+Y) = EX + EY.$$

- 定理6.3. (3), 单调性: 假设⋆⋆. 又若$X \geqslant Y$, 则$EX \geqslant EY$.

- 推论6.2. (1) 线性：假设EX, EY 存在. 则,

$$E(aX+bY)=aEX+bEY.$$

- 推论6.2. (2) 和的期望：假设$EX_1,\cdots,EX_n$ 都存在, $\eta=X_1+\cdots+X_n$. 则$E\eta$ 存在, 且

$$E\eta=EX_1+\cdots+EX_n.$$

- 例. 超几何分布$\eta\sim H(N,D,n)$.
  若第i 个产品是次品, 则令$X_i=1$; 否则, 令$X_i=0$. 则,

$$\eta=X_1+\cdots+X_n\Rightarrow E\eta=np.$$

- 定理6.4. (马尔可夫不等式). 设$X \geqslant 0$, 且EX 存在. 则对任意$C > 0$, 有

$$P(X \geqslant C) \leqslant \frac{1}{C} EX.$$

- 证: 令$A = \{X \geqslant C\}$. 则$1_A \leqslant \frac{X}{C}$. 于是,

$$P(A) = E1_A \leqslant E\frac{X}{C} = \frac{1}{C} EX.$$

- 例, 若$X \geqslant 0$, 且$EX = 0$, 则

$$P\left(X \geqslant \frac{1}{n}\right) \leqslant nEX = 0$$

$$\Rightarrow P(X > 0) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0.$$

- 定理6.5. X 是离散型, 或连续型, 且下面的级数或积分绝对收敛, 则

$$Ef(X) = \sum_k f(x_k)p_k, \quad \text{或 } Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx.$$

- 例6.1. 设$X \sim U(0, 2\pi)$, 求$E\sin X$.
- 用公式:

$$E\sin X = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \cdot p(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$